ディジタル回路 I

第3回

前回の復習

- 演習問題解答
- 加法標準形(積和標準形)
- 乗法標準形(和積標準形)

加法標準形 (積和標準形)

- ブール代数での方法
  - 出力が”1”となる入力に注目
  - ここの入力のAND(論理積)をとる、その際”0”の入力は否定をとる
  - 得られた論理積どうしのOR(論理和)をとる

加法標準形 (積和標準形)

4入力1出力論理関数の真理値表

X	Y	Z	W	O	
0	0	0	0	0	(0)
0	0	0	1	0	(1)
0	0	1	0	1	(2)
0	0	1	1	1	(3)
0	1	0	0	1	(4)
0	1	0	1	0	(5)
0	1	1	0	1	(6)
0	1	1	1	0	(7)
1	0	0	0	1	(8)
1	0	0	1	0	(9)
1	0	1	0	1	(10)
1	0	1	1	1	(11)
1	1	0	0	0	(12)
1	1	0	1	0	(13)
1	1	1	0	0	(14)
1	1	1	1	1	(15)

ブール代数の式 $O = \overline{X}\cdot\overline{Y}\cdot Z\cdot\overline{W} + \overline{X}\cdot\overline{Y}\cdot Z\cdot W + \overline{X}\cdot Y\cdot\overline{Z}\cdot\overline{W} + \overline{X}\cdot Y\cdot Z\cdot\overline{W} + X\cdot\overline{Y}\cdot\overline{Z}\cdot\overline{W} + X\cdot\overline{Y}\cdot Z\cdot\overline{W}$
$+ X\cdot\overline{Y}\cdot Z\cdot W + X\cdot Y\cdot Z\cdot W$

Σ()の式 $O = \Sigma\,(2, 3, 4, 6, 8, 10, 11, 15)$

乗法標準形 (和積標準形)

- ブール代数での方法
  - 出力が”0”となる入力に注目
  - ここの入力のOR(論理和)をとる、その際”0”の入力は否定をとる
  - 得られた論理積どうしのAND(論理積)をとる

乗法標準形 (和積標準形)

4入力1出力論理関数の真理値表

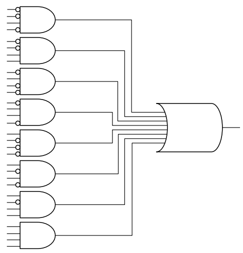
X	Y	Z	W	O	
0	0	0	0	0	(0)
0	0	0	1	0	(1)
0	0	1	0	1	(2)
0	0	1	1	1	(3)
0	1	0	0	1	(4)
0	1	0	1	0	(5)
0	1	1	0	1	(6)
0	1	1	1	0	(7)
1	0	0	0	1	(8)
1	0	0	1	0	(9)
1	0	1	0	1	(10)
1	0	1	1	1	(11)
1	1	0	0	0	(12)
1	1	0	1	0	(13)
1	1	1	0	0	(14)
1	1	1	1	1	(15)

ブール代数の式 $O = (\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z}+\overline{W})\cdot(\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z}+W)\cdot(\overline{X}+Y+\overline{Z}+W)\cdot(\overline{X}+Y+Z+W)\cdot(X+\overline{Y}+\overline{Z}+W)$
$\cdot(X+Y+\overline{Z}+\overline{W})\cdot(X+Y+\overline{Z}+W)\cdot(X+Y+Z+\overline{W})$

Σ()の式 $O = \Sigma\,(0, 1, 5, 7, 9, 12, 13, 14)$

加法(乗法)標準形

ブール代数の式 $O = \overline{X}\cdot\overline{Y}\cdot Z\cdot\overline{W} + \overline{X}\cdot\overline{Y}\cdot Z\cdot W + \overline{X}\cdot Y\cdot\overline{Z}\cdot\overline{W} + \overline{X}\cdot Y\cdot Z\cdot\overline{W} + X\cdot\overline{Y}\cdot\overline{Z}\cdot\overline{W} + X\cdot\overline{Y}\cdot Z\cdot\overline{W} + X\cdot\overline{Y}\cdot Z\cdot W + X\cdot Y\cdot Z\cdot W$



7

加法(乗法)標準形

- 利点
  - 設計が簡単で機械的
  - NOT-AND-ORで構成されるので、出力の遅延は3段分
- 欠点： 無駄が多い
  - 真理値表に出てくる「1」の数だけANDゲートが必要
  - ANDゲートは、すべての入力の信号線と同数の入力を必要とする
  - 真理値表の出力における「1」の数だけの入力数をもつORゲートが必要になる

→ 簡単化が必要

8

論理回路の簡単化

- 簡単化とは？
  (1) 回路の遅延時間を短くすること
  (2) 回路の総量を小さくすること
- 加法標準形の簡単化
  (1) AND素子の数を減らすこと
  ＝ ＯＲ素子の入力数を減らすこと
  (2) AND素子の入力数を減らすこと
- 方法
  1. ブール代数による方法
  2. カルノー図による方法
  3. クワイン・マクラスキーの方法
  4. Reushの方法

9

簡単化の一般手順

- 手順
  - 論理的隣接性に着目して、積項の数と入力数を減らすことを可能なかぎり繰り返す。
  - 最終的に得られる組合せ回路がもっとも簡単なものとなるように、この簡単化の手順を最適化する

10

論理演算の基本法則 (1)

- X + 0 = X　X・0 = 0 (零元)
- X + 1 = 1　X・1 = X (単位元)
- X + X = X　X・X = X (ベキ等律)
- $X + \overline{X} = 1$　$X\cdot\overline{X} = 0$ (相補律)

5/9 修正

11

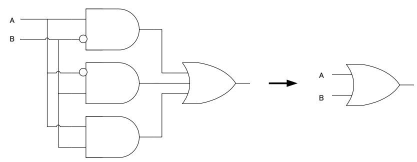
論理演算の基本法則 (2)

- X + Y = Y + X　X・Y = Y・X （交換律）
- X + (Y + Z) = (X + Y) + Z　X・(Y・Z) = (X・Y)・Z （結合律）
- X・(Y + Z) = X・Y + X・Z　X + (Y・Z) = (X + Y)・(X + Z) （分配法則）
- $\overline{(X + Y)} = \overline{X}\cdot\overline{Y}$　$\overline{(X\cdot Y)} = \overline{X} + \overline{Y}$ （ド・モルガンの法則）

12

簡単化の例

$$
\begin{aligned}
&\Sigma(1, 2, 3)\\
=\ & A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B + A \cdot B\\
=\ & A \cdot \overline{B} + A \cdot B + \overline{A} \cdot B + A \cdot B && \text{(交換律)}\\
=\ & A \cdot (\overline{B} + B) + (\overline{A} + A) \cdot B && \text{(分配法則)}\\
=\ & A \cdot 1 + 1 \cdot B\\
=\ & A + B
\end{aligned}
$$



クワイン・マクラスキー法（1）

- 主項の決定
  (a) 標準積和形から、最小項表をもとに初期表を構成する。
  (b) 初期表を行の併合によって更新する。（更新してできる表をリテラル消去表という）。
  (c) 併合できる行がなくなるまで、リテラル消去表の更新を繰り返す。
  (d) （c）を繰り返して最後に（併合できなかった）残った各行が主項にあたる。

クワイン・マクラスキー法（2）

- 必須主項の決定と主項の選択
  (a) 主項と最小項と対応表（これは「主項一最小項表」という）を作成する。
  (b)主項一最小項表によって必須主項の決定と必要な主項の選択を行う。
- 必須主項を含む選択した主項すべてORで結んだものが最小積和形である。

クワイン・マクラスキー法による簡単化

$$O = \overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot Z \cdot \overline{W} + \overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot Z \cdot W + \overline{X} \cdot Y \cdot \overline{Z} \cdot \overline{W} + \overline{X} \cdot Y \cdot Z \cdot \overline{W} + X \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z} \cdot \overline{W} + X \cdot \overline{Y} \cdot Z \cdot \overline{W} + X \cdot \overline{Y} \cdot Z \cdot W + X \cdot Y \cdot Z \cdot W$$

0010	(1)
0011	(2)
0100	(3)
0110	(4)
1000	(5)
1010	(6)
1011	(7)
1111	(8)

⇨

1	0010 (1)
	0100 (3)
	1000 (5)
2	0110 (4)
	0011 (2)
	1010 (6)
3	1011 (7)
4	1111 (8)

⇨

1	001- (1),(2)
	-010 (1),(6)
	-011 (2),(7)
	01-0 (3),(4) *
2	10-0 (5),(6) *
	101- (6),(7)
3	1-11 (7),(8) *

⇨

1	-01- (1),(2),(6),(7)
	01-0 (3),(4)
	10-0 (5),(6)
3	1-11 (7),(8)

1の数ごとにまとめる

1ビットのみが異なる組を見つけて1つにまとめる
それ以上まとめることができない項に*をつけ主項とする

問題

- 次の論理式を基本法則とクワイン・マクラスキー法それぞれで簡単化せよ
  - $X\overline{Y}\overline{Z}+XY\overline{Z}+XYZ$
  - $\overline{X}YZ+X\overline{Y}Z+XY\overline{Z}+XYZ$
  - $\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}+\overline{X}\overline{Y}Z+XY\overline{Z}+X\overline{Y}\overline{Z}$
  - $\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}+\overline{X}Y\overline{Z}+XY\overline{Z}+X\overline{Y}\overline{Z}$
  - $\overline{X}\overline{Z}\overline{W}+\overline{X}Y\overline{Z}+YZW+XY\overline{Z}W+X\overline{Y}ZW$