

1. オーディオ信号の離散コサイン変換 (DCT)

(1) オーディオ信号

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} \quad (N\text{次元ベクトル})$$

(2) 離散コサイン変換行列 ($N \times N$ 行列)

$$H = \begin{bmatrix} h(0,0) & h(0,1) & \cdots & h(0,N-1) \\ h(1,0) & h(1,1) & \cdots & h(1,N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ h(N-1,0) & h(N-1,1) & \cdots & h(N-1,N-1) \end{bmatrix}$$

ただし、

$$h(m,n) = \sqrt{\frac{2}{N}} \alpha_m \cos \left[\frac{(2n+1)m\pi}{2N} \right]$$

$$\alpha_m = \begin{cases} 1/\sqrt{2} & (m=0) \\ 1 & (m \neq 0) \end{cases}$$

$$(m,n = 0,1,2,\dots,N-1)$$

(3) 離散コサイン変換行列の性質

直交行列: $H H_t = H_t H = I$ (N 次の単位行列)

ただし、 H_t : H の転置行列

(4) 離散コサイン変換 (DCT)

$$\tilde{c} = H \tilde{x}$$

(5) 離散コサイン変換係数 (DCT 係数)

$$\tilde{c} = \begin{bmatrix} c(0) \\ c(1) \\ \vdots \\ c(N-1) \end{bmatrix} \quad (N\text{次元ベクトル})$$

(6) 離散コサイン逆変換 (IDCT)

$$\tilde{x} = H_t \tilde{c}$$

(\because) H が直交行列なので元の \tilde{x} に戻る。

2. 離散コサイン変換の例

(1) $N=2$ の場合

離散コサイン変換行列 (2×2 行列)

$$H = \begin{bmatrix} h(0,0) & h(0,1) \\ h(1,0) & h(1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$H_t = \begin{bmatrix} h(0,0) & h(1,0) \\ h(0,1) & h(1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

(2) $N=3$ の場合

離散コサイン変換行列 (3×3 行列)

$$H = \begin{bmatrix} h(0,0) & h(0,1) & h(0,2) \\ h(1,0) & h(1,1) & h(1,2) \\ h(2,0) & h(2,1) & h(2,2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$H_t = \begin{bmatrix} h(0,0) & h(1,0) & h(2,0) \\ h(0,1) & h(1,1) & h(2,1) \\ h(0,2) & h(1,2) & h(2,2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

(練習問題 1)

$N=3$ の離散コサイン変換行列 H について、 H が直交行列であることを確かめよ。

(練習問題 2)

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix} \text{ のとき、} \tilde{x} \text{ に DCT を施し、}$$

DCT 係数 \tilde{c} を求めよ。

(練習問題 3)

練習問題 2 で求めた \tilde{c} に IDCT を施し、逆変換の結果が元の \tilde{x} に戻ることを計算により確かめよ。

(練習問題 4)

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 35 \\ 20 \end{bmatrix} \text{ のとき、} \tilde{x} \text{ に DCT を施し、}$$

DCT 係数 \tilde{c} を求めよ。

(練習問題 5)

練習問題 4 で求めた $\tilde{c} = \begin{bmatrix} c(0) \\ c(1) \\ c(2) \end{bmatrix}$ に対し、 $c(2) = 0$

とおいて $\tilde{c}' = \begin{bmatrix} c(0) \\ c(1) \\ 0 \end{bmatrix}$ をつくる。 \tilde{c}' に IDCT を施

して \tilde{x} の近似信号 \tilde{x}' を求めよ。また誤差ベクトル $\tilde{e} = \tilde{x} - \tilde{x}'$ を計算せよ。

【メモ】