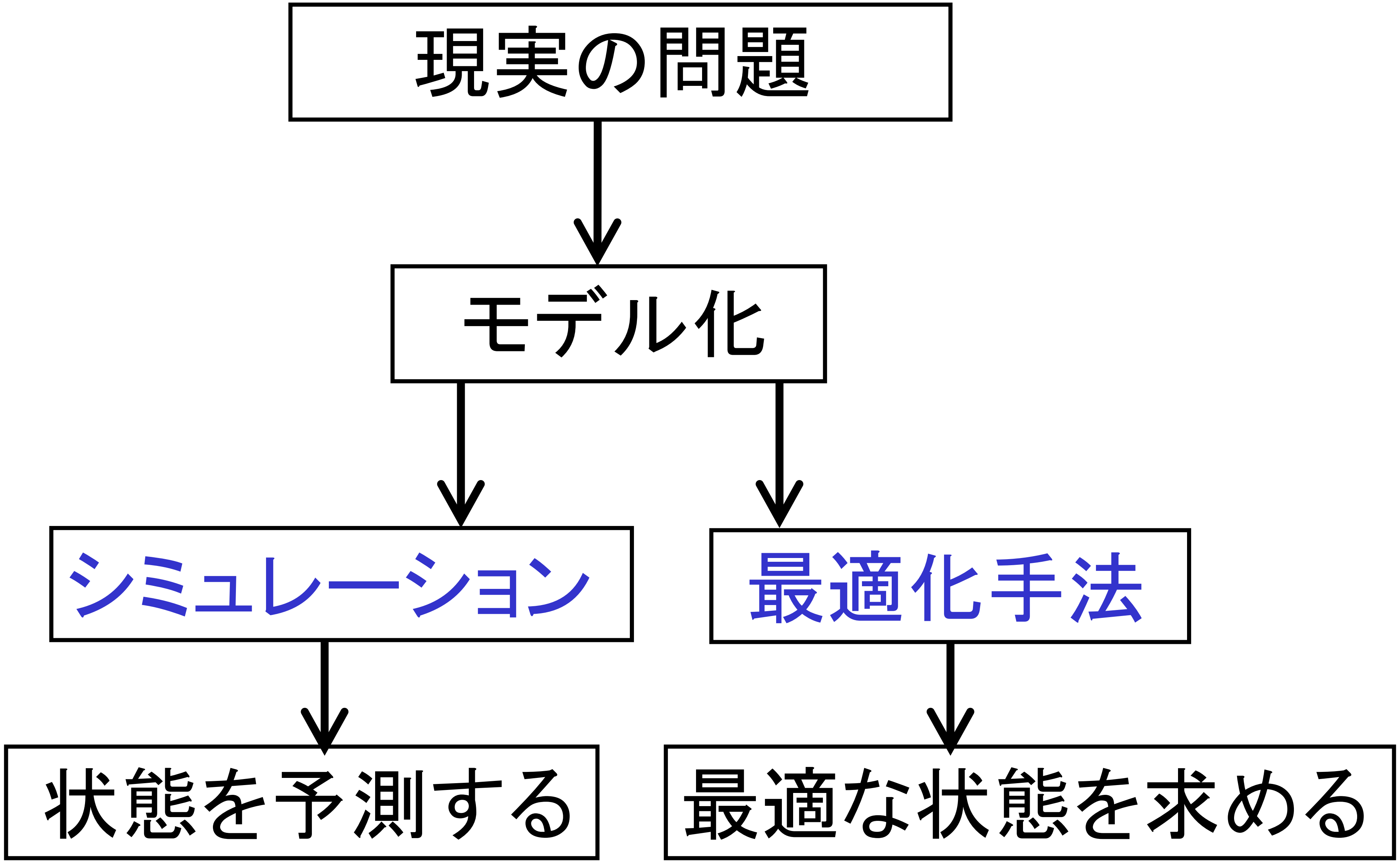
＜モデリングとシミュレーション＞



シミュレーションの基礎

モデルが作成されると実物や対象の特性を知るためにシミュレーションが行われる。このとき，コンピュータを使わなければシミュレーションができない場合やコンピュータを使った方が便利な場合が多い。ここでは，シミュレーションの基礎的な方法とコンピュータを活用することの目的や利点を学習しよう。また，シミュレーションを前提としたモデル化の一般的な注意も学習しよう。

シミュレーションとは，モデルを用いて実際の現象や実物の動作をまねる①ことである。モデルには操作可能なパラメータ②が含まれており，実物を使った実験と同じように，コンピュータを使ったシミュレーションで，パラメータをかえてその動作をくりかえし調べることができる。シミュレーションから実際の現象や実物に関する情報を得て問題解決に用いたり，動作を分析して設計・計画に用いたりする。

シミュレーションにおいては，コンピュータを活用すると次のような利点があり，コンピュータを使わないととけない場合もある。

・必要に応じて時間を伸縮して実験ができる。

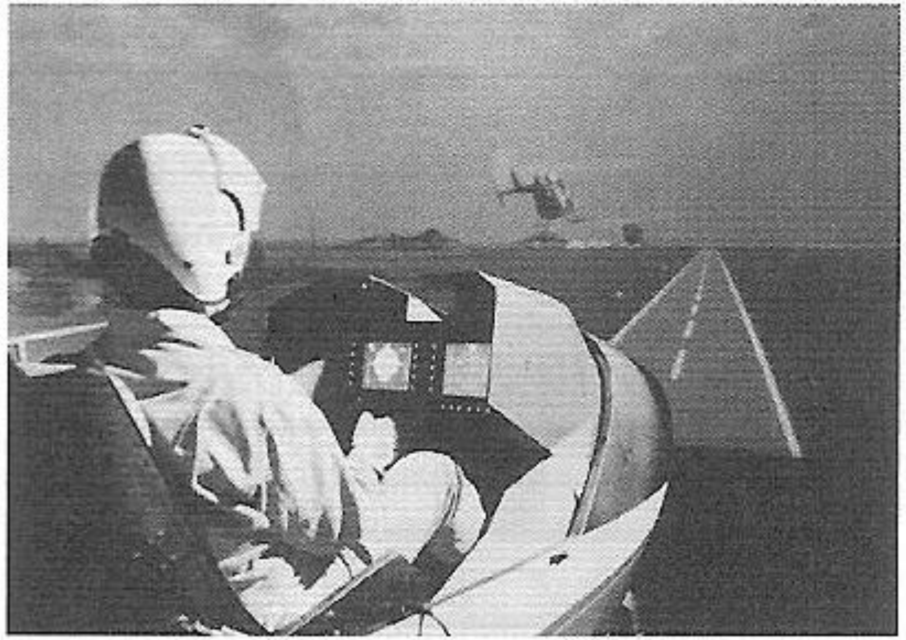
・ソフトウェアでモデルがつくられるため，実物や模型をつくるより費用がかからない場合が多い。

・プログラムやパラメータを変更するだけで，モデルの構成要素や各種条件を自由に簡単に変更することができ，何回でも実験をすることができる。

・実物や模型による実験では危険な場合や人命が失われる場合の実験ができる。

・社会現象のように，実物や物理的モデルで実験することがむずかしい場合でも実験ができる。

・数式モデルが数学的にとけない場合も，数値計算のくりかえしにより問題をとくことができる。



■図1　フライトシミュレータ

コンピュータシミュレーションの手順

①問題を明確にし，シミュレーションの目的を決める（図2❶）。

②シミュレーションのための数式モデルを作成する（❷）。

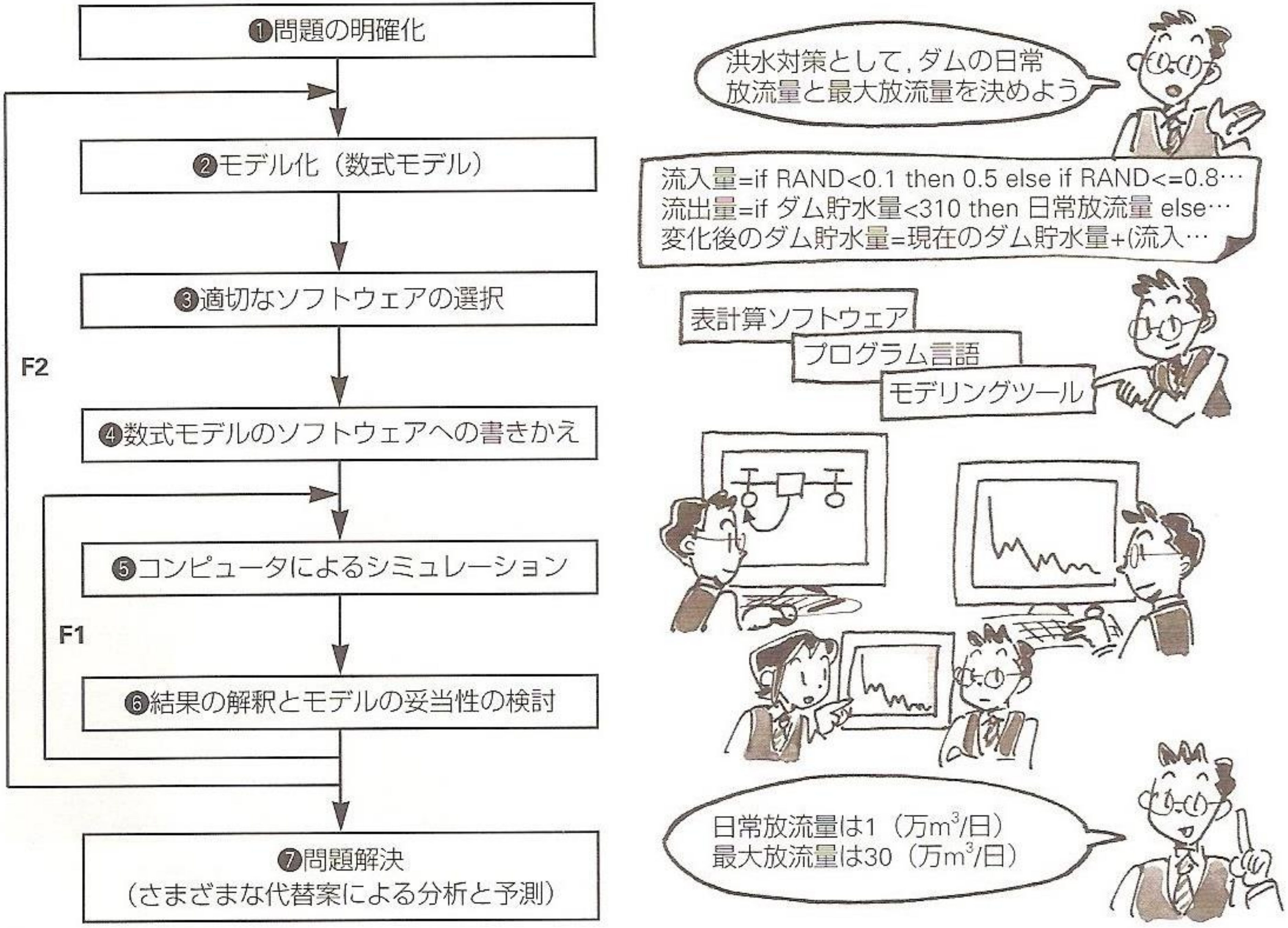
③ソフトウェアを選択して，数式モデルをコンピュータで実行できるように書きかえる（❸❹）。

④パラメータの値をさまざまにかえてシミュレーションを実施し，結果をグラフ，表や画像にして出力する（❺）。

⑤出力結果の意味を解釈したり現実の現象と比較したりしてモデルの妥当性を検討し，問題があればモデルを修正する（❻）。

⑥モデルの修正は，データを修正する場合（F1）や，モデルの構造をみなおして数式モデルを修正する場合（F2）などがある。

⑦モデルが妥当であれば，さまざまなシミュレーションから現象の分析や予測をして最適な解をみいだす（❼）。



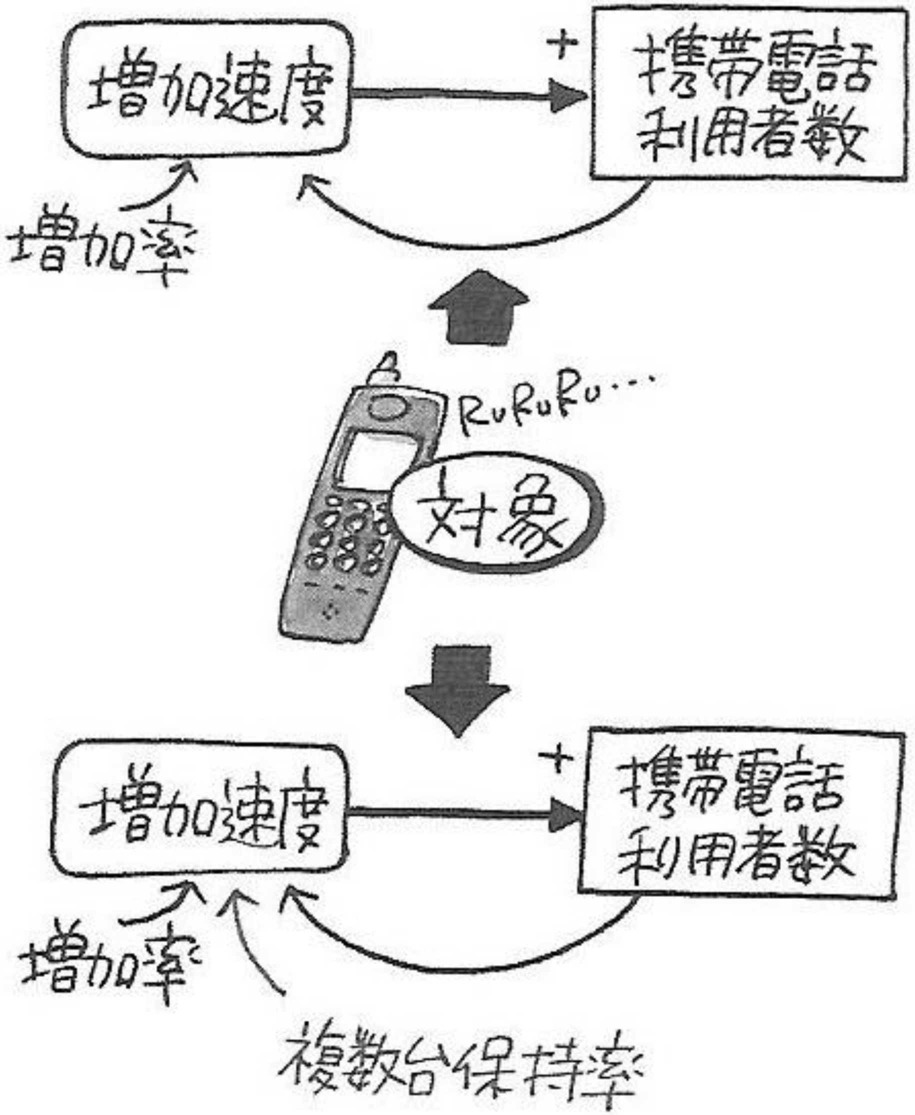
■図2　シミュレーションの手順

3 モデル化とシミュレーションのときの注意

モデル化とシミュレーションをするときには次の点に注意する。

①現実をどの程度正確にモデルとしてあらわせばよいか

モデル化の過程で，現実がもつすべての情報をモデルのなかに含めることは不可能であり，何らかの簡略化が行われる。多くの要因をモデルに含めると，現実とよく一致したシミュレーション結果が得られるが，モデルは複雑で大規模なものになり，モデル化とシミュレーションの作業がむずかしくなる。簡略化しすぎるのはよくないが，つねに現実を厳密にあらわす必要はなく，大まかな動作がわかればよい場合もある。モデルの簡略化は，モデルを何に使うのかといったモデル化の目的に応じて行うことが重要である。



②対象が同じでもモデルが異なる場合がある

同じ対象でも異なったモデルがつくられることがある。これは，モデル化には唯一の方法や決定的な方法がなく，現象のとらえ方や仮定の設定のしかたには，モデル作成者の経験や考えによる判断が大きく影響してくるためである。

異なる構造のモデルからは異なったシミュレーション結果が得られる。このようなことから，つくられたモデルが絶対に正しいものと信じてしまわないことがたいせつである。

③モデルが適切かどうかを検証する

現象のとらえ方や仮定の設定のしかたにより，つくられるモデルが異なるので，モデル化のときにたてた仮定をじゅうぶん検討するとともに，モデルが適切であるかをシミュレーションによって確かめることが重要である。

モデルが適切かどうかは，シミュレーション結果と現実のデータとの比較によって行われる場合が多い。現実に適合していない場合はモデルの修正をくりかえす。しかし，地域計画や経済計画のように，すすむべき将来の方向をさぐるためにいくつかの政策結果を予測するモデルの場合には，これら政策実施後の実際の結果を知ることができないので，モデルの妥当性の検証は困難になる。このような場合，現象の重要な要素がモデルに取り入れられているかどうか，要素間の因果関係が正しくとらえられ表現されているかどうか，使用されているデータが正確であるかどうかを確かめることが検証の中心になる。

例題1　ダム洪水対策問題

あるダムで，洪水期（6，7月とする）のダム管理における洪水対策①として放流量を決めたい。シミュレーションによる解決案を提案するためにモデルをつくってみよう。なお，ダムの容量は，満水で350万m^3の大きさとする（この値を超えるとダムから水があふれ大変危険な状態になる）。1日あたりのダムへの水の流入量は不規則で，洪水期については表のように与えられているものとする。

1日あたりの流入量（万m^3）	確率	累積確率
0.5	0.1	0.10
1	0.7	0.80
5	0.1	0.90
10	0.07	0.97
20	0.02	0.99
50	0.01	1.00

①大雨による洪水をなくすために，ダムで一時的に水をためて安全に放流すること。

▶ 1．問題を明確化する

ときどき発生する大雨に対して，ダムから水があふれないようにする必要がある。そこで，次のように問題解決の方針を考える。ダムの貯水量が少なすぎてもよくないので，下限を280万m^3とし，上限を満水より少ない340万m^3として，280万から340万m^3におさまるように1日あたりの「日常放流量」と「最大放流量」の値を決めることにする。また，最大放流を行うのは，ダムの貯水量が310万m^3以上のときとし，貯水量が310万m^3未満のときは日常放流とする。簡単にするために，水道用水などの取水，蒸発散や地下への浸透は考えないことにする。

▶ 2．モデルの構造を決定する

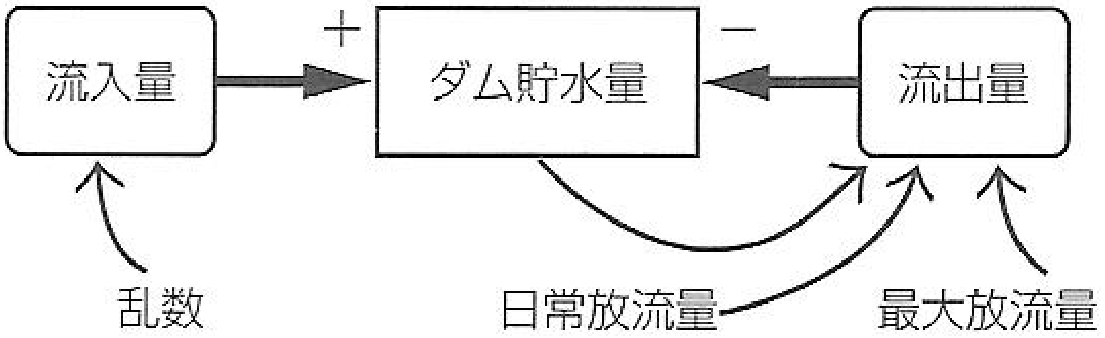
ダムの貯水量が蓄積量になる。

ダム貯水量の変化は流入の速さと流出の速さによって決まる。

流入の速さはダムへの１日あたりの「流入量」によって決まる。流入量は，乱数関数「RANDOM」を発生して表の確率のデータに従うようにする。

１日あたりの「流出量」がダム貯水量の流出の速さとなる。流出の速さは，１日あたりの「日常放流量」と「最大放流量」およびダム貯水量によって決まる。

これらの因果関係図は右図のようになる。



▶ 3. モデルを数式で表現する

1日あたりの「流入量」の式は，乱数の値を累積確率の範囲に当てはめる方法を用いる(→p.48)。流入量の値を取り出す関数は，図3の数式表①のように与えられる。

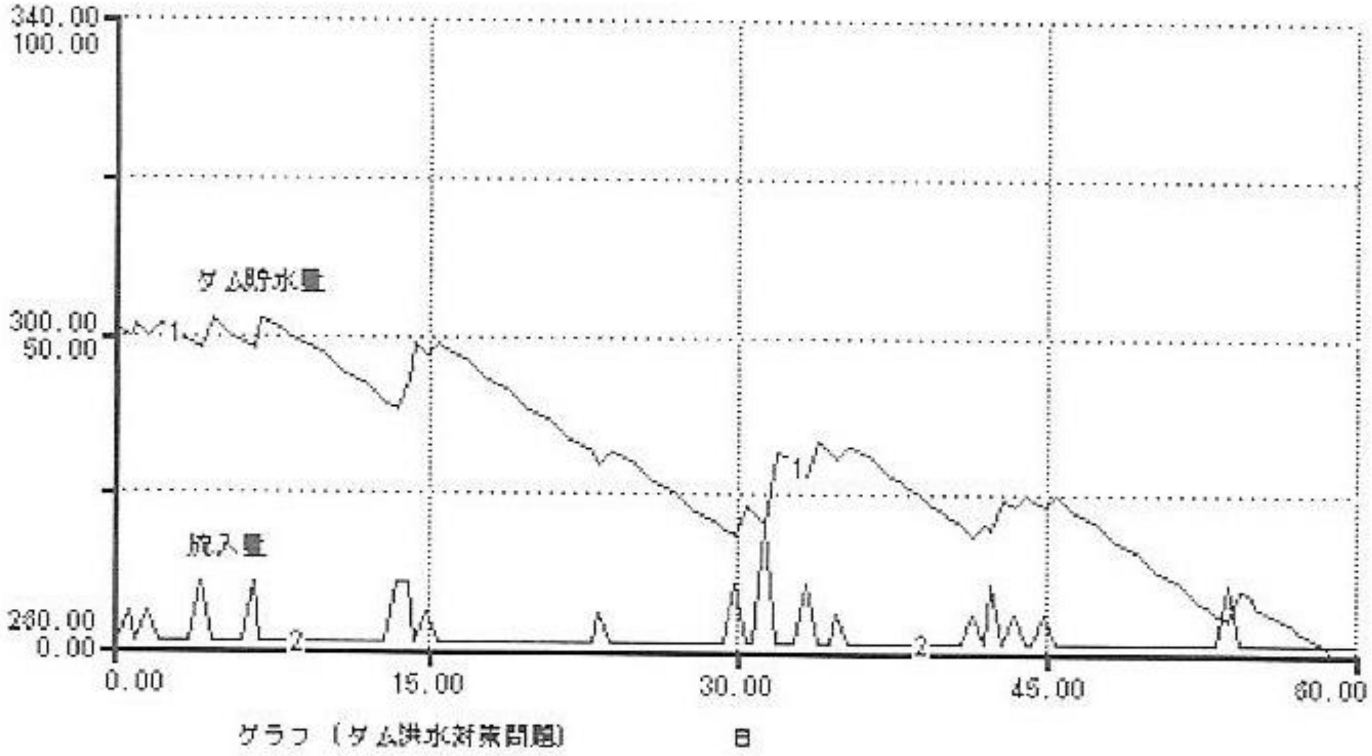
1日あたりの「流出量」は，ダム貯水量＜310のときは「日常放流量」の値，それ以外のときは「最大放流量」の値を出力する関数として数式表②のようにする。

変化後のダム貯水量は数式表③のようになる。

```
①流入量＝ if RAND<=0.1 then 0.5
          else if RAND<=0.8  then 1
          else if RAND<=0.9  then 5
          else if RAND<=0.97 then 10
          else if RAND<=0.99 then 20
          else 50
②流出量＝ if（ダム貯水量<310）then 日常放流量
          else 最大放流量
③変化後のダム貯水量＝現在のダム貯水量
          ＋（流入量－流出量）×時間間隔
```

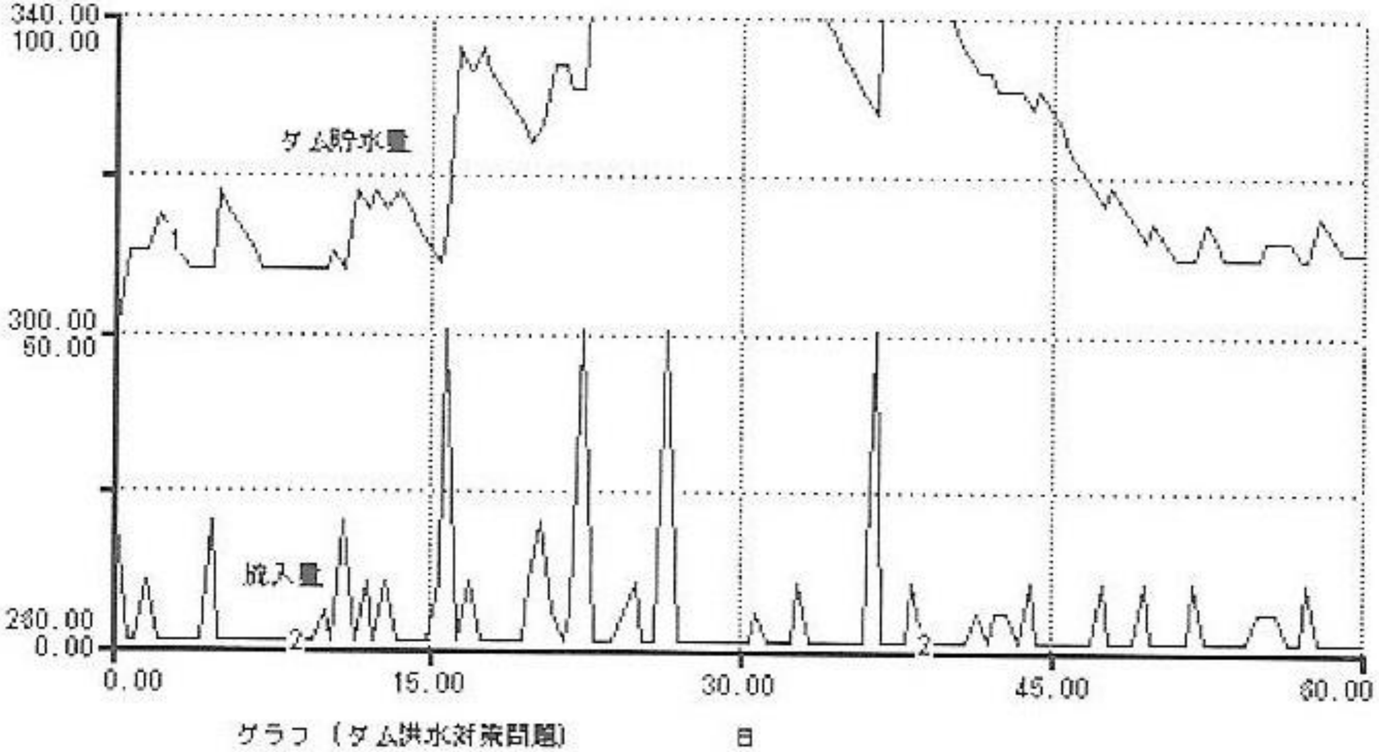
■図3　数式表

ここでは，第３章で扱うモデリングツールを使うことにする。「最大放流量」と「日常放流量」にデータを設定してシミュレーションを行い，その結果をグラフに出力する。図４のグラフは「日常放流量」を2(万m^3／日)，「最大放流量」を30(万m^3／日）としたために渇水状態（280万m^3を下まわっているかそれに近い値）になっているシミュレーション結果である。



■図4　渇水状態

また，図5のグラフは「日常放流量」を0.1（万m^3／日），「最大放流量」を5（万m^3／日）としたために，大雨のときに「上限の340万m^3を超え，ダムから水があふれ大変危険な状態」になった例である。



■図5　ダムから水があふれ大変危険な状態

▶ 5．結果を解釈しモデルの妥当性を検討する

この2つの例より，流入量に応じて「日常放流量」，「最大放流量」が設定どおりに機能して，ダムは渇水状態になったり，あふれたりする状態がシミュレーションされており，モデルはダム貯水量の動きをとらえているようである。

▶ 6. 問題解決

「日常放流量」と「最大放流量」を変化させてシミュレーションした結果,「日常放流量」を1 (万m^3/日),「最大放流量」を30 (万m^3/日) にするのがよいのではないかという結論になった。

しかし,いくつかの仮定をたてたり大幅な単純化をしているので,このモデルがどの程度現実をあらわしているのかが問題である。たとえば,流入量に応じて「日常放流量」,「最大放流量」の2段階しか放流量を設定しておらず,現実的ではない。このため,1日あたり50万m^3の流入があった場合,貯水量がダム容量を超えてしまうことがある。さらに,流入に対して貯水量が鋭敏に反応しすぎているようにも思われる。これを確かめるには実際の動きと比較してみることも必要である①。

①いくつかのダムのデータについてはWebページから情報が得られる。

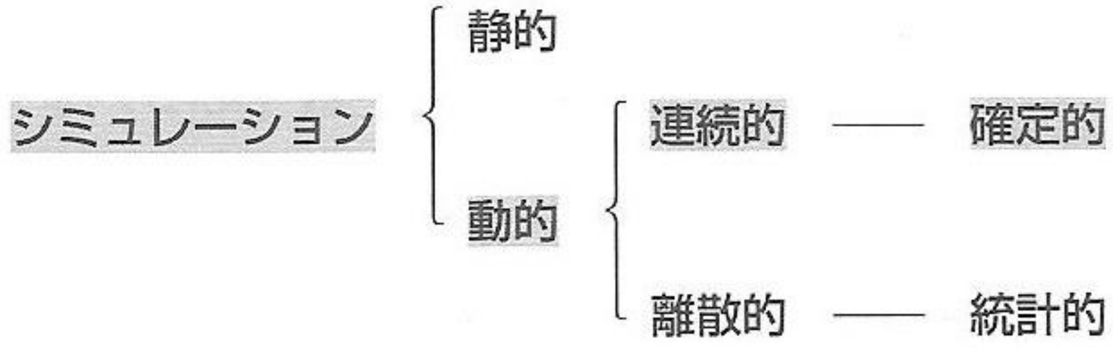
問1 例題1において，「日常放流量」「最大放流量」の2段階だけでなく，数式表の②の放流量をいくつかの段階に分けて設定し，貯水量に応じた放流量をきめ細かく調整できるようにモデルを変更しなさい。

- ダム貯水量が260万m^3以下のとき，流出量を日常放流量の5%
- ダム貯水量が260～280万m^3のとき，流出量を日常放流量の30%
- ダム貯水量が280～300万m^3のとき，流出量を日常放流量
- ダム貯水量が300～320万m^3のとき，流出量を日常放流量の10倍
- ダム貯水量が320万m^3以上のとき，流出量を最大放流量

■放流量を5段階に分けた例

1 システムダイナミックスとは

図1に示すように，シミュレーションの型は，時間に対して静的なものと動的なものに分類される。さらに，動的なものは連続的なものと離散的なものに分類される。ここで，連続的とは，時間に関して連続的に変化することをあらわし，離散的とは，1年や1か月ごとなどの離散時間ごとにとらえることができることをあらわす。確定的とは，条件が設定されると一意的に結果が導き出されるものをいう。**システムダイナミックス**は，図1の網が掛かっている部分の性質をもつ。



■図1　システムダイナミックスの性質

② ストックとフローによるモデルの構成

身のまわりの自然現象や社会現象などのシステムの時間的変化は，ストックとフローの組み合わせで表現することができる。

■表1　自然現象の例

現象	インフロー①	ストック	アウトフロー①
生物の個体数	出生	個体数	死亡
ダムの貯水量	流入	貯水量	流出
水温の変化	加熱	水温	放熱

■表2　社会現象の例

現象	インフロー	ストック	アウトフロー
駐車場の管理	入庫	駐車台数	出庫
預金額の変化	入金	残高	出金
リサイクル	回収	保管	再生

例題1　駐車場のモデル化

ある駐車場の車の入出庫のようすを観察すると，入庫は10分間に８台，出庫は10分間に５台の割合であった。この駐車場における駐車台数の変化のようすをモデル化してみよう。

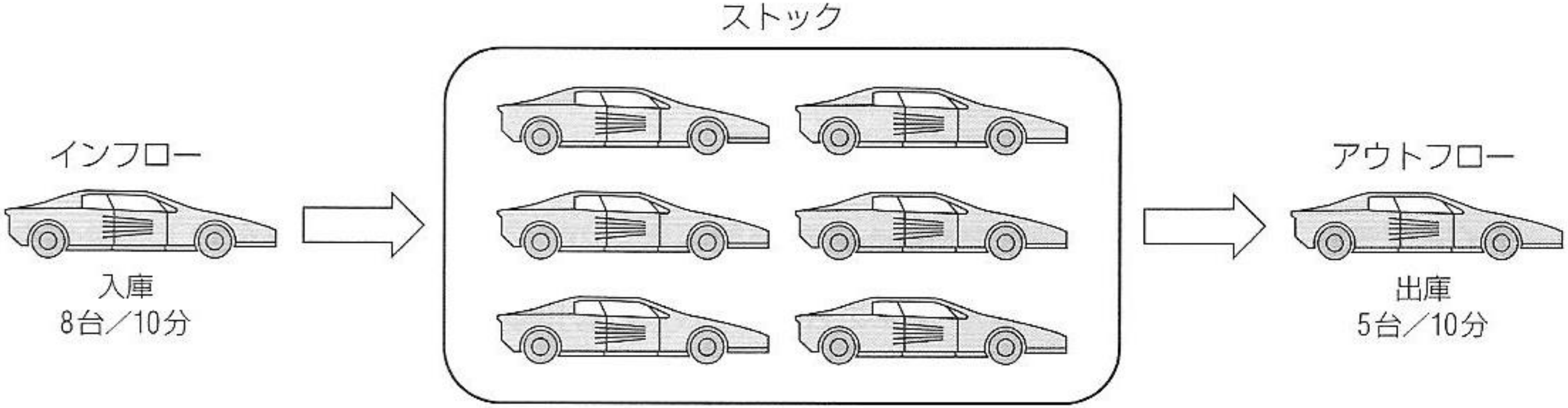
手順

図３に示すとおり，駐車場をストック，入庫台数をインフロー，出庫台数をアウトフローと考え，ストックの値が現在の駐車台数を示す。これらの要素を関係づけると図４のようになる。

このモデルについて，次の条件でシミュレーションを行う。

時間の単位：時間　　期間：開始０時間　終了18単位時間

時間間隔：0.25　　計算方法：オイラー法



■図3　駐車場モデルのストックとフロー

例題1　駐車場の駐車台数の変化

ある駐車場での車の入出庫のようすを観察すると，入庫は10分間に10台，出庫は8台の割合であった。この駐車場での駐車台数のようすをモデル化してみよう。

▶ 2．数式・プログラムの作成と実行

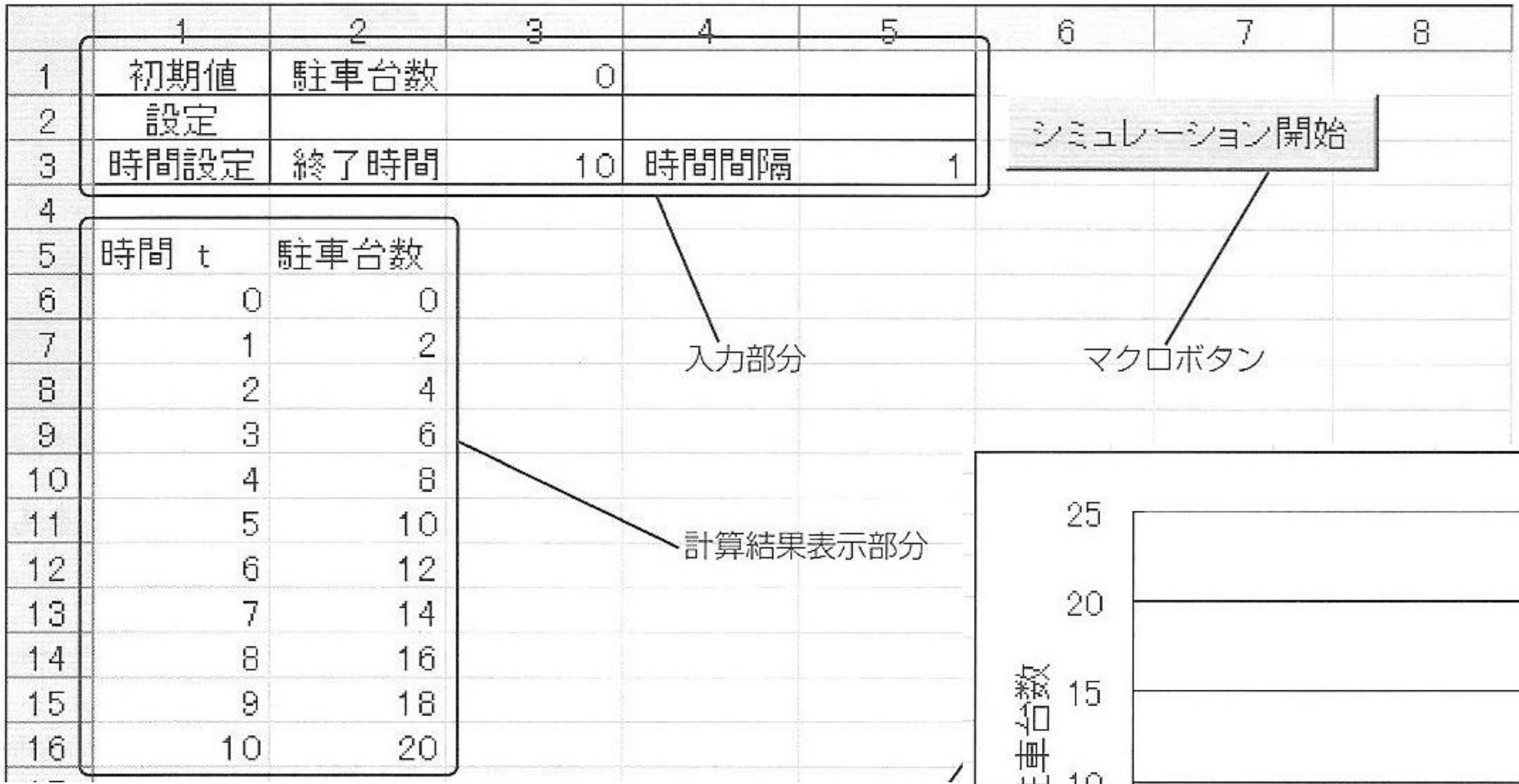
時間をt，時間間隔をΔtとして，式を作成する。

$$\text{駐車台数}(t+\Delta t)=\text{駐車台数}(t)+(\text{入庫}-\text{出庫})\times\Delta t$$

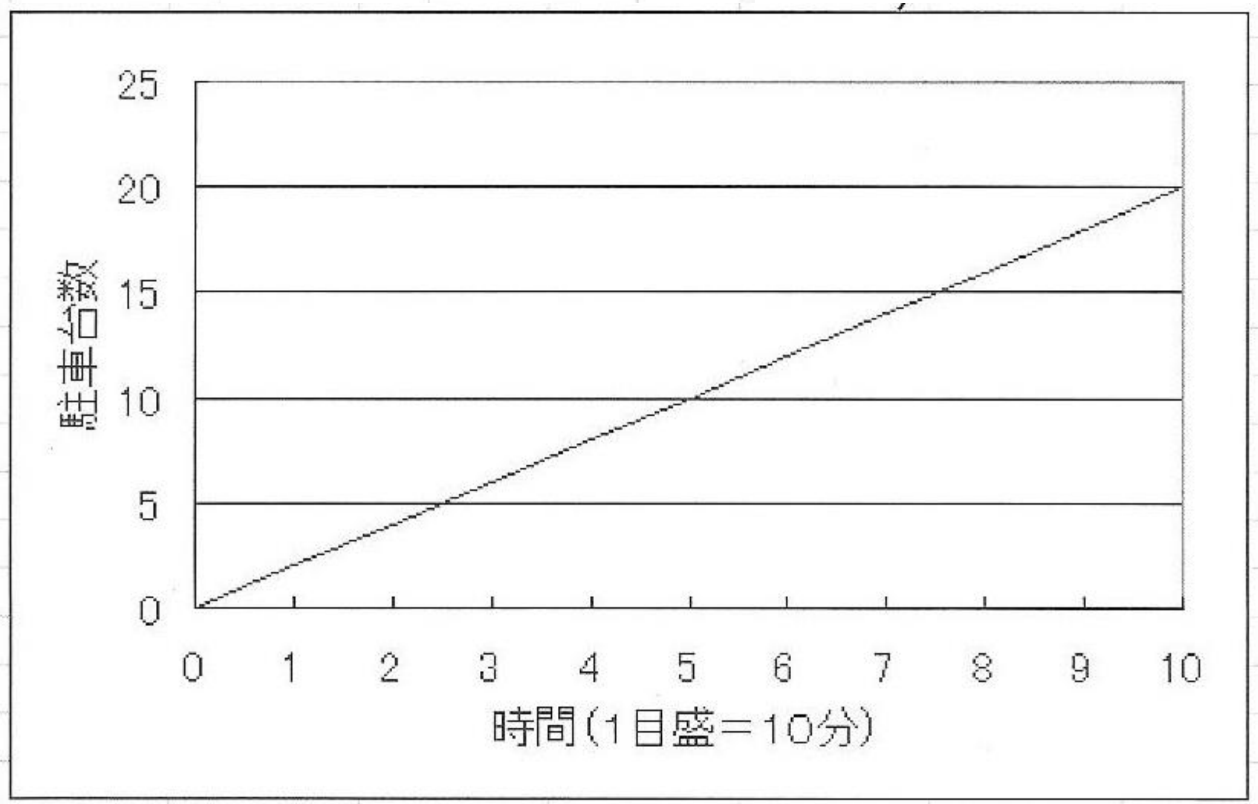
これより，プログラムは図2のようになり，実行結果は図3のようになる[①]。

ここでは，Δtを1，終了時間を10としている。終了時間10は，実際には100分である。

①ここでは，表計算ソフトの表示形式をR1C1形式にしている。(→p.170)



	1	2	3	4	5	6	7	8
1	初期値	駐車台数	0					
2	設定							
3	時間設定	終了時間	10	時間間隔	1			
4								
5	時間 t	駐車台数						
6	0	0						
7	1	2						
8	2	4						
9	3	6						
10	4	8						
11	5	10						
12	6	12						
13	7	14						
14	8	16						
15	9	18						
16	10	20						



例題2 グッピーの繁殖

水槽で10匹のグッピーを飼っている。増加率を60%，減少率を40%とし，実質増加率（増加率－減少率）を20%として考えると，1年後には何匹になっているか。ただし，餌は必要分を与えるものとし，水槽はじゅうぶんな広さがあり，飼育環境は完全なものとする。

▶ 2．数式の作成

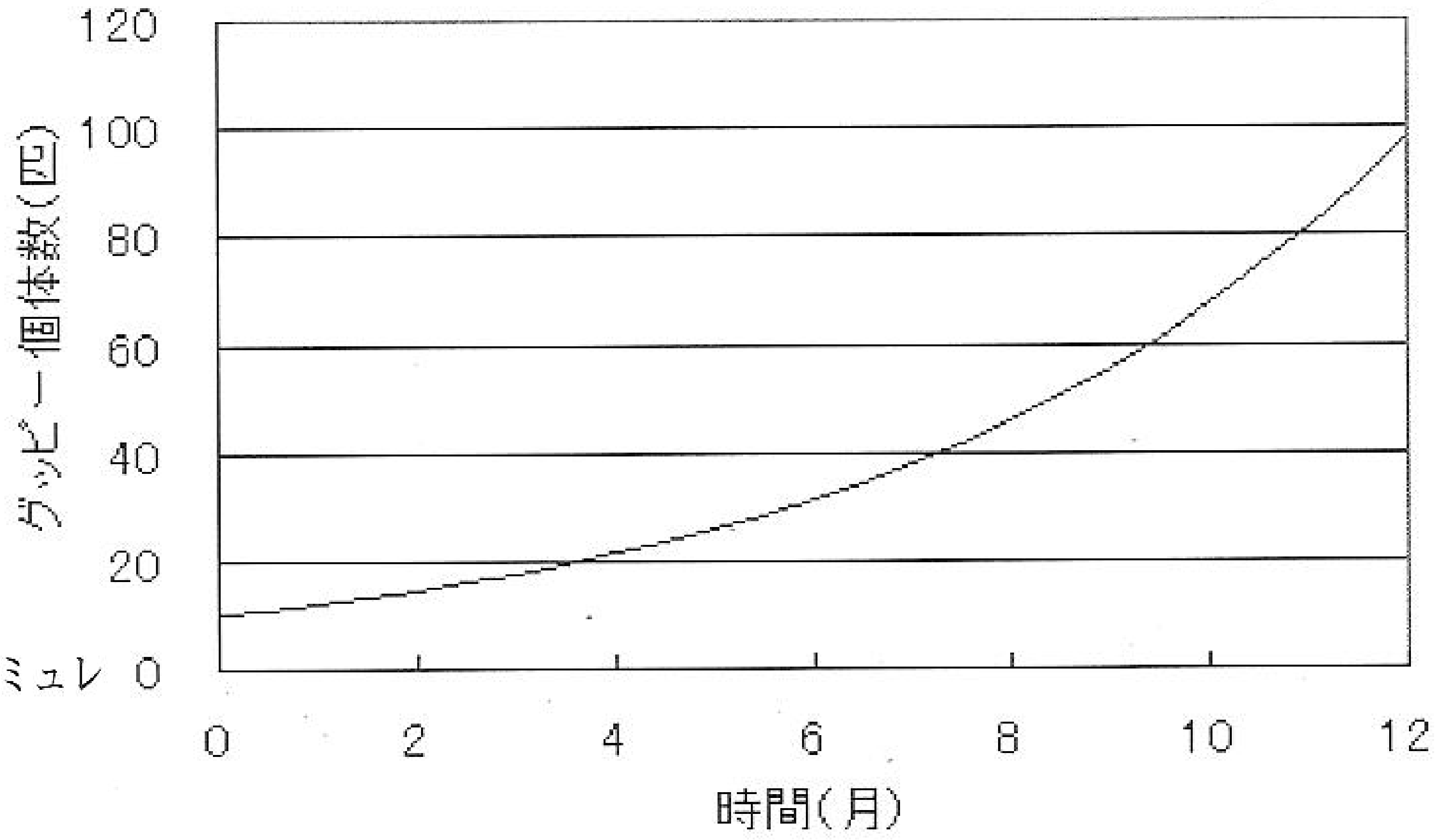
時間ｔか月後のグッピー個体数の計算式を考える。

増加速度(t)＝グッピー個体数(t)×増加率

グッピー個体数(t＋Δt)＝グッピー個体数(t)＋増加速度(t)×Δt

	1	2	3	4	5
1	初期値	グッピー個体数	10		
2	設定値	増加率	0.2		
3	時間設定	終了時間	12	時間間隔	0.5
4					
5	経過時間	グッピー個体数			
6	0	10			
7	0.5	11			
8	1	12			
9	1.5	13			
10	2	15			
11	2.5	16			

■図6　グッピーの繁殖のシミュレーション結果（一部）



■図7　グッピーの繁殖のグラフ

問2 例題２で，グッピーの増加率が25%になった場合のシミュレーションを行い，結果をグラフで表示しなさい。

参考にしよう　システムダイナミックスと差分方程式

この節で述べたシステムダイナミックスの例をもとに，１章で学習した平均変化率や差分方程式との関係を示そう。

たとえば，例題１の駐車場の例では，

駐車台数(t＋Δt)

＝駐車台数(t)＋(入庫－出庫)×Δt

であった。ここで，

駐車台数(t＋Δt)＝y＋Δy

駐車台数(t)＝y

入庫－出庫＝k

とおくと，この式は次のように書きかえることができる。

$$\frac{\Delta y}{\Delta t}=k$$

したがって，この関係式は，平均変化率が一定であることを示している。時間間隔Δtがじゅうぶん小さいならば，差分方程式である。システムダイナミックスでいう「変化の速さ」とは，数学での「平均変化率」である。

それでは，もう1つ例を示そう。例題2のグッピーの例では，

グッピー個体数(t＋Δt)

＝グッピー個体数(t)＋増加速度(t)×Δt

増加速度(t)＝グッピー個体数(t)×増加率

であった。ここで，

グッピー個体数(t＋Δt)＝y＋Δy

グッピー個体数(t)＝y

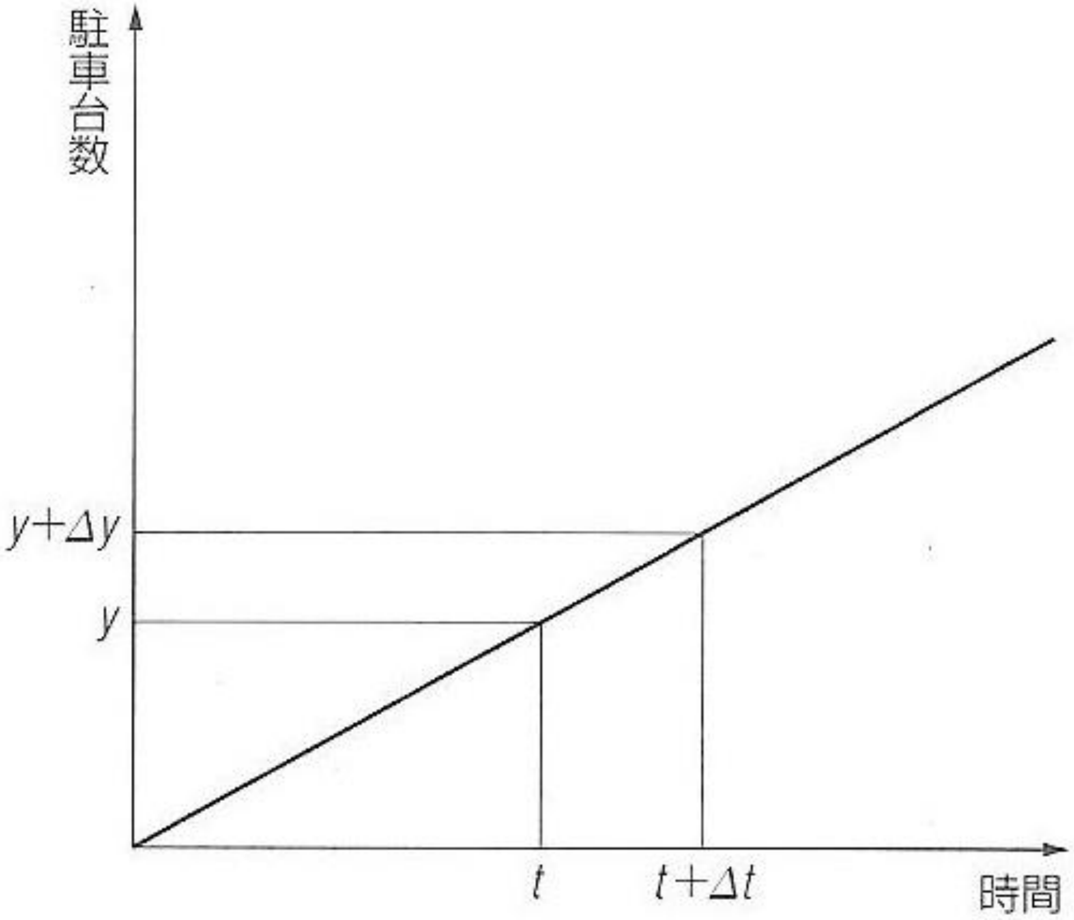
増加率＝k

とおくと，この式は次のように書きかえることができる。

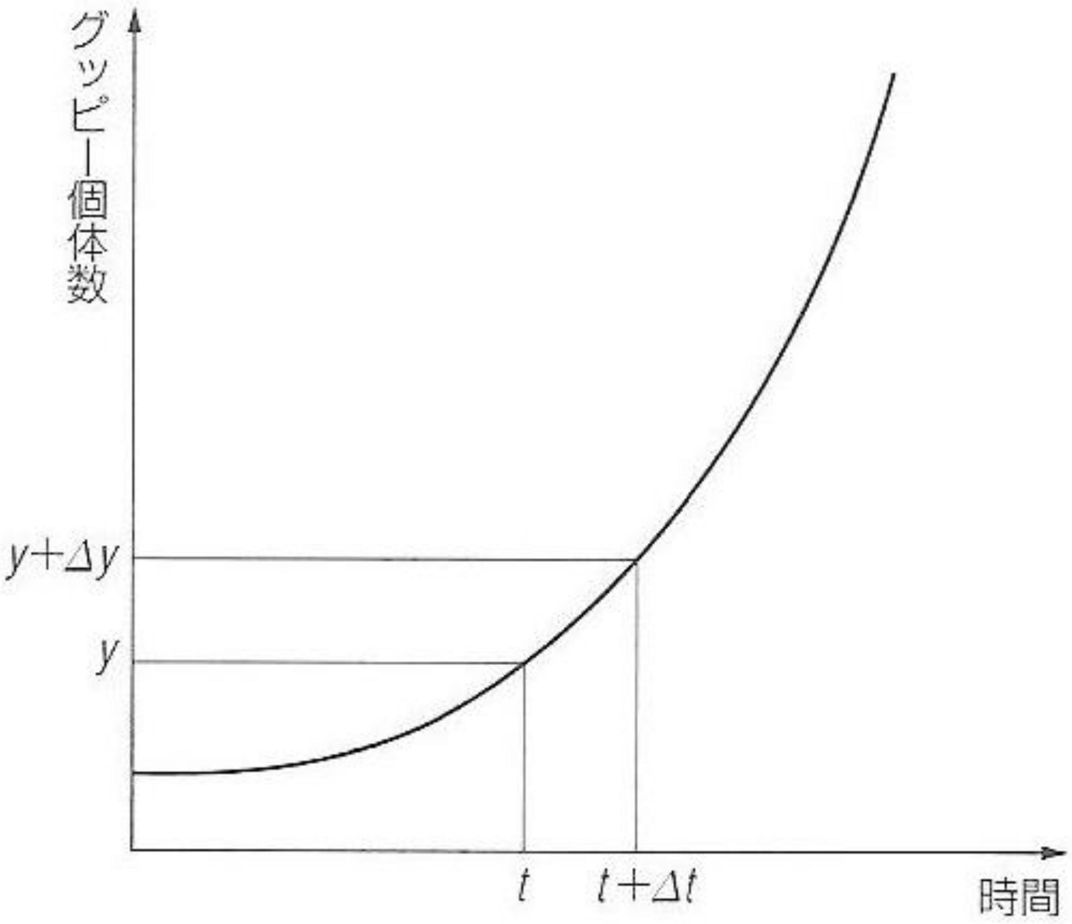
$$\frac{\Delta y}{\Delta t}=ky$$

この場合，グッピー個体数の平均変化率がグッピー個体数に比例していることをあらわしている。同じように考えていくと，例題3も同じモデルとなる。例題4は水温の平均変化率が水温に比例するが，この場合は負に比例している。

なお，この節の数値解法のプログラムは，1章で述べたオイラー法である。



■駐車台数の時間変化



■グッピー個体数の時間変化

参考にしよう　差分方程式と微分方程式

平均変化率は2点の直線の傾きであり，例題4のロケットの高度のように，最初の高度から各時間に対する高度を近似的に求めていくことができる。

平均変化率の時間間隔Δtがじゅうぶん小さい場合，関数$y=f(t)$の変化を$f(t+\Delta t)-f(t)=\Delta y$とおくと，

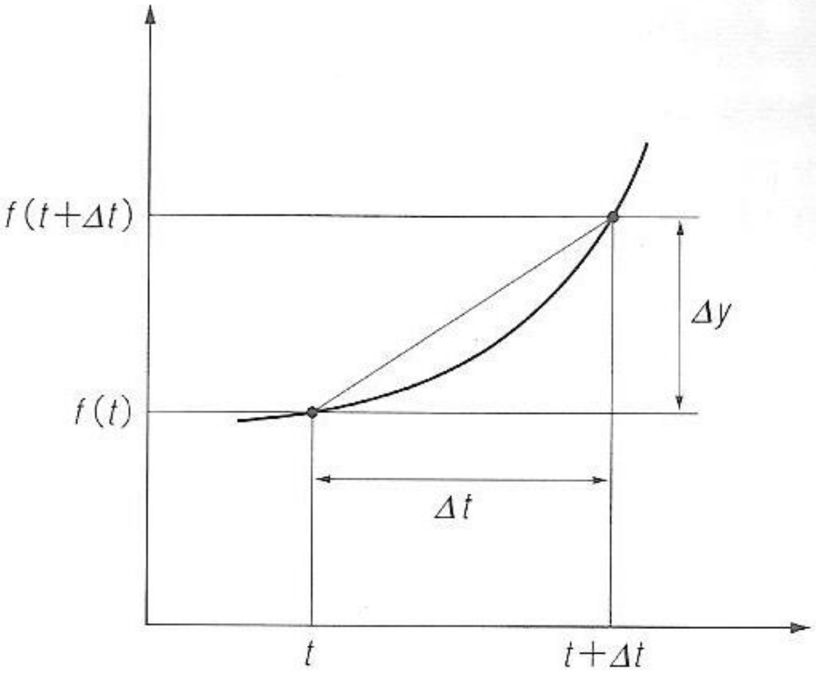
$$\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=\frac{\Delta y}{\Delta t}=4t$$

であり，このような関係式を**差分方程式**という。**オイラー法**は，差分方程式を数値的にといていく方法である。

また，時間間隔Δtをかぎりなく0に近づけたとき，2点の直線の傾きは関数f(t)の接線となる。接線の傾きを$f'(t)$としたとき，

$f'(t)=4t$，あるいは$\frac{dy}{dt}=4t$

のような関係式を**微分方程式**という。微分方程式を近似したものが差分方程式である。微分方程式の数値解法には，オイラー法や**ルンゲクッタ法**とよばれる方法がある。オイラー法は誤差が大きいため，精度が求められる場合は，ルンゲクッタ法が利用される。



バンジージャンプやスカイダイビングを行った場合に，足につけたゴムやパラシュートの影響を受ける前の人が落下するようすをモデル化してみよう。

加速度：－9.8（m／s^2）

力＝質量×加速度　…………（1）

位置（高さ）：100（m）

質量：75（kg）

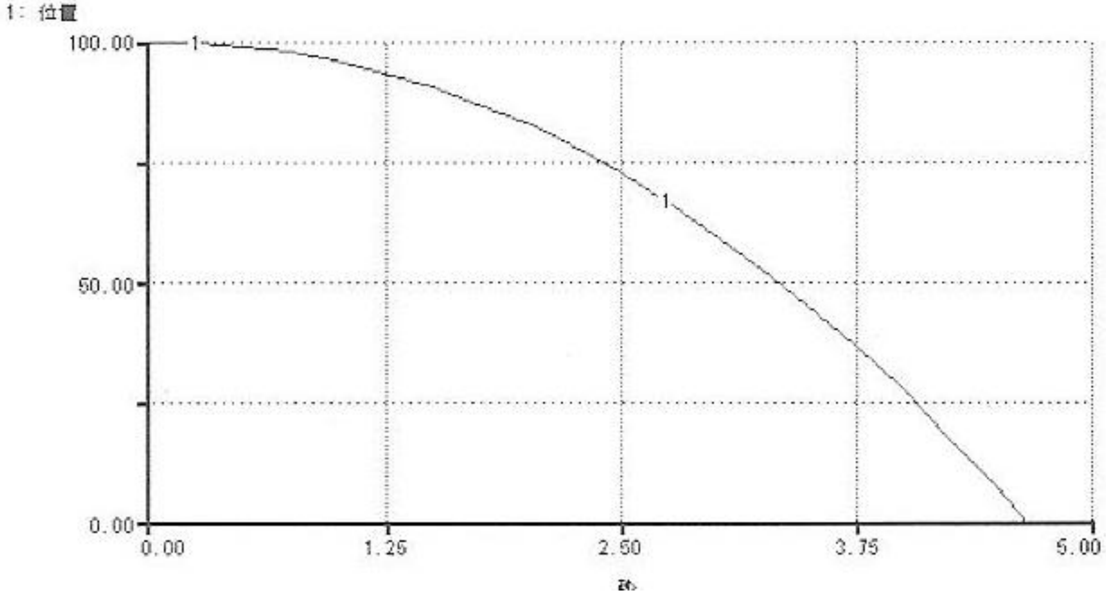
運動量：0（kg m／s）

速度＝運動量×1／質量

次の条件で，このモデルのシミュレーションを行う。

時間の単位：秒　　　期間：開始0秒　終了5秒

時間間隔：0.25　　　計算方法：オイラー法



例題3　バンジージャンプのモデルをつくる

バンジージャンプは，足につけたゴムひもがのび縮みすることにより，上下運動をくりかえす。このようすをシミュレーションしてみよう。ただし，簡単にするため，ジャンプ台の高さからゴムひもの長さまでの自由落下については考慮しないものとする。

ジャンプ台の高さ：100（m）

フック定数：20（kg／s^2）

台からの位置＝位置－ジャンプ台の高さ

復元力＝フック定数×台からの位置

次の条件で，このモデルのシミュレーションを行う。

時間の単位：秒　　期間：開始0秒　終了60秒

時間間隔：0.25　　計算方法：ルンゲクッタ法