関数の勾配とヘッセ行列

$\nabla f(\boldsymbol{x})$: 点$\boldsymbol{x}$における関数fの勾配

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_\mathrm{n}} \end{bmatrix}$$

1．(1)

$$f(\boldsymbol{x}) = 3x_1{}^2 - 2x_1x_2 + 3x_2{}^2 + 6x_1 - 10x_2$$

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} = 6x_1 - 2x_2 + 6$$

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} = -2x_1 + 6x_2 - 10$$

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 6x_1 - 2x_2 + 6 \\ -2x_1 + 6x_2 - 10 \end{bmatrix}$$

1．(2)　点$\boldsymbol{a}=(0,0)^{\mathrm{T}}$ における関数fの勾配

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = \begin{bmatrix} 6 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$: 点$\boldsymbol{x}$における関数fのヘッセ行列

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1{}^2} & \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1 x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1 x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2{}^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n{}^2} \end{bmatrix}$$

対称行列

1. (3)

$$f(\boldsymbol{x}) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 6x_1 - 10x_2$$

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 6x_1 - 2x_2 + 6 \\ -2x_1 + 6x_2 - 10 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

固有多項式　$g_A(t) = |tE - A|$　　A：正方行列

行列Aの固有値：$g_A(t) = 0$　の根（複素根も含む）

$$A = \nabla^2 f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$|tE - A| = \begin{vmatrix} t-6 & 2 \\ 2 & t-6 \end{vmatrix} = t^2 - 12t + 32 = (t-4)(t-8)$$

$$\lambda = 4, 8$$

$$T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \;\longrightarrow\; A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \;\longrightarrow\; A\boldsymbol{x} = \lambda E\boldsymbol{x}$$

$(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$　　$\boldsymbol{x}$：固有ベクトル

λ＝4のとき　$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$　　$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

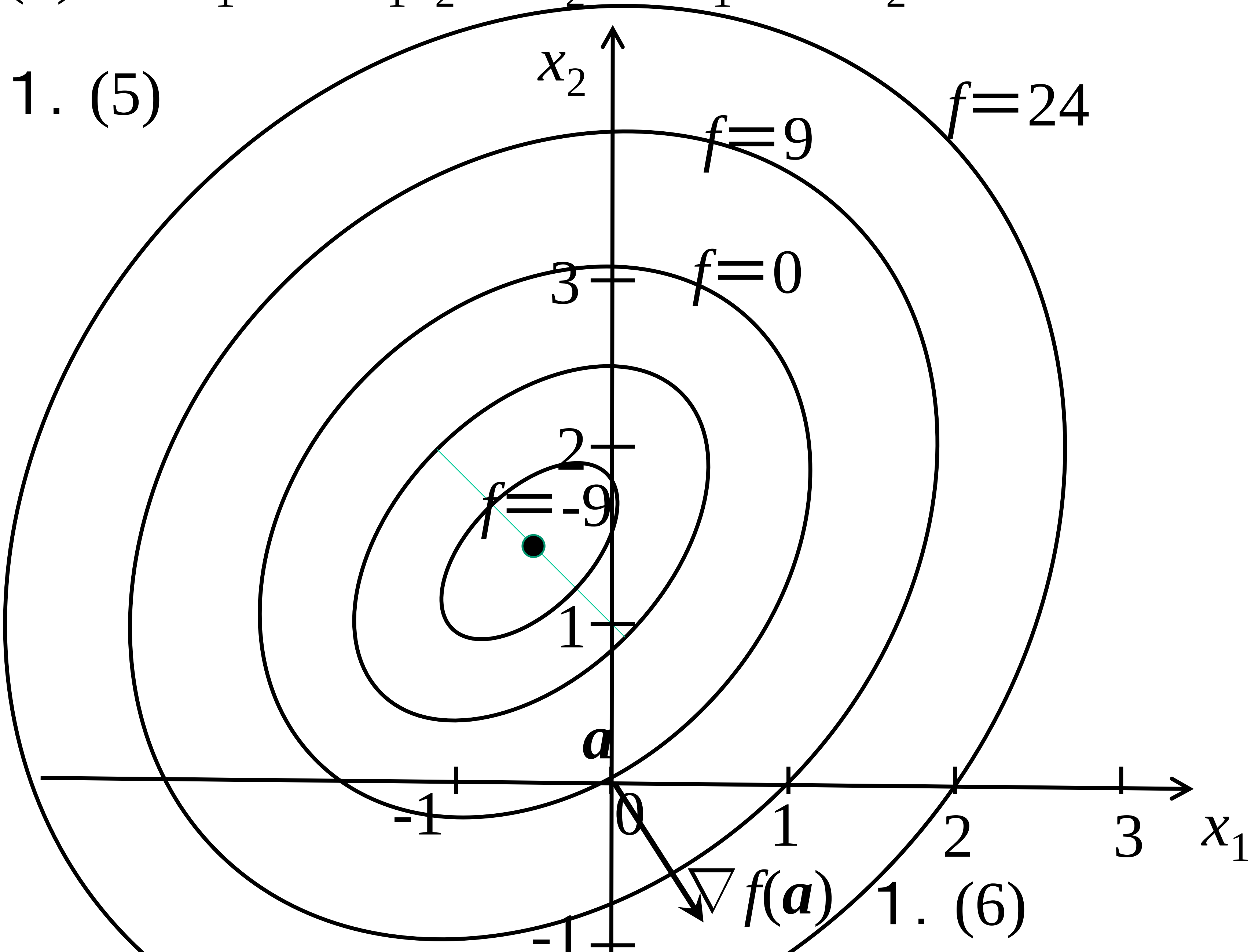
λ＝8のとき　$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$　　$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

1．(4)

固有値：$\lambda_1=4$, $\lambda_2=8$

固有ベクトル：$x_1=(1,1)^T$, $x_2=(1,-1)^T$

$f(\boldsymbol{x}) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 6x_1 - 10x_2$ の等高線



制約なし問題の最適性条件

$$\nabla f(x^*) = \mathbf{0}$$

x^*が局所的最適解であるための必要条件

x^* : 関数fの停留点

1次の必要条件

１. (7)

最適性の１次の必要条件

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$$

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 6x_1 - 2x_2 + 6 \\ -2x_1 + 6x_2 - 10 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{x}^* = (-1/2,\ 3/2)$$

A：半正定値行列

$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x} \geqq 0$ （すべての$\boldsymbol{x}$について）

$$\left.\begin{array}{l} \nabla f(\boldsymbol{x}^*) = \mathbf{0} \\ \\ \nabla^2 f(\boldsymbol{x}^*) \text{ は半正定値} \end{array}\right]$$

最適性の**2次の必要条件**

$$\left.\begin{array}{l} \nabla f(\boldsymbol{x}^*) = \mathbf{0} \\ \\ \nabla^2 f(\boldsymbol{x}^*) \text{ は正定値} \end{array}\right]$$

最適性の**2次の十分条件**

１．(8)

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

固有値：$\lambda_1=4,\ \lambda_2=8$

固有値がすべて正である対称行列

↓

正定値行列

$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^*)$は正定値

$\boldsymbol{x}^*$は最適性の２次の必要条件と十分条件を満たす

最急降下法

＜最急降下法＞

(0) 出発点$\boldsymbol{x}^{(0)}$を選び，k:=0 とおく.

(1) $\nabla f(\boldsymbol{x}^{(k)})=\boldsymbol{0}$ ならば計算終了．さもなければ

$\boldsymbol{d}^{(k)} := -\nabla f(\boldsymbol{x}^{(k)})$ とおいてステップ(2)へ.

(2) ステップ幅$\alpha^{(k)}$を求め，次の点

$\boldsymbol{x}^{(k+1)} := \boldsymbol{x}^{(k)} + \alpha^{(k)} \boldsymbol{d}^{(k)}$ を定める.

k:= k +1とおいてステップ(1)へ戻る.

２. (1)

$$\boldsymbol{d} = -\nabla f(\boldsymbol{x})$$

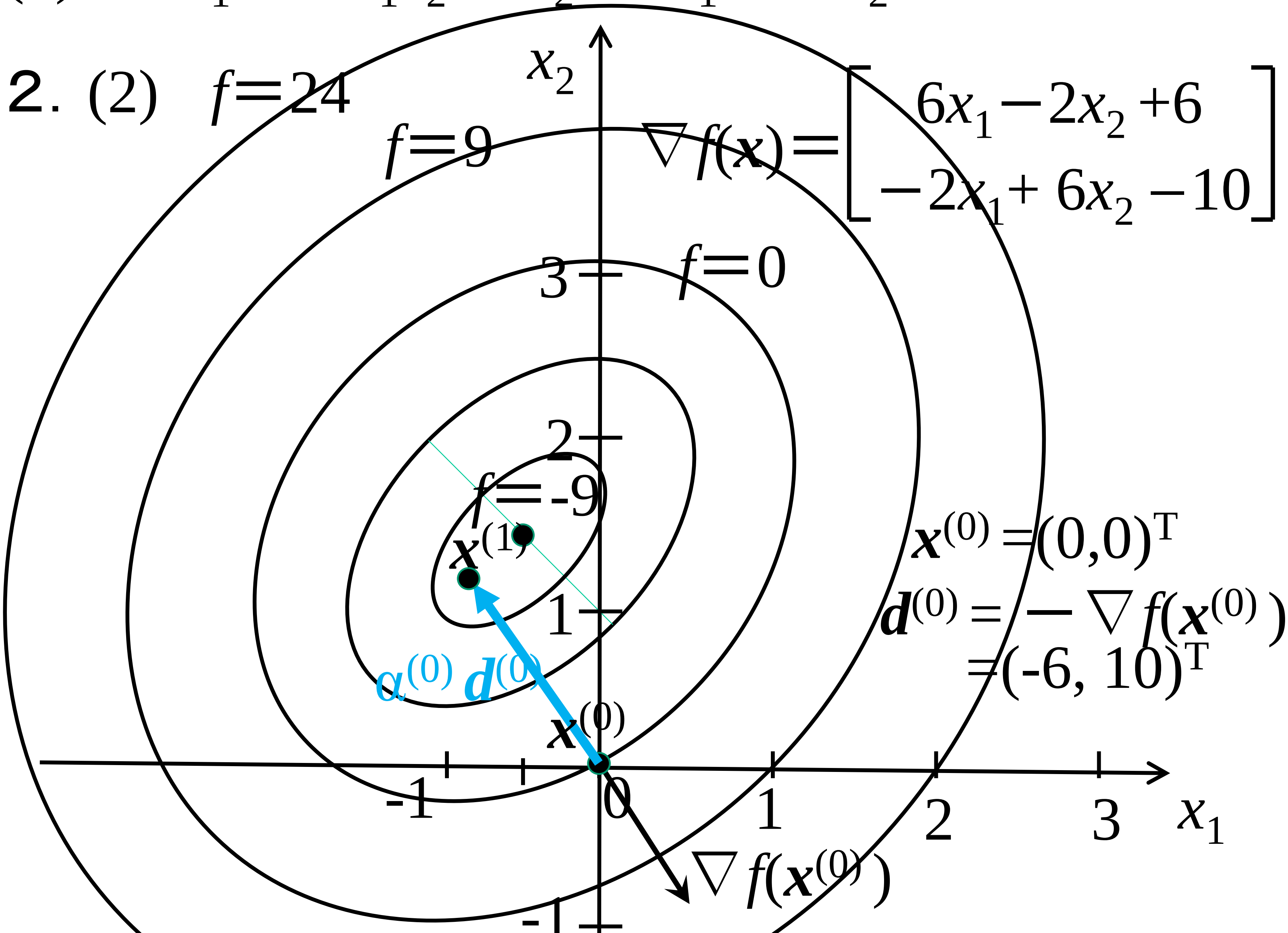
$$f(\boldsymbol{x}) = 3x_1{}^2 - 2x_1x_2 + 3x_2{}^2 + 6x_1 - 10x_2$$

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 6x_1 - 2x_2 + 6 \\ -2x_1 + 6x_2 - 10 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{x}^{(0)} = (0,\ 0)^{\mathrm{T}}$　のとき

$$\boldsymbol{d}^{(0)} = (-6,\ 10)^{\mathrm{T}}$$

$f(\boldsymbol{x}) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 6x_1 - 10x_2$ の等高線



ニュートン法と準ニュートン法

＜ニュートン法＞

(0) 出発点$\boldsymbol{x}^{(0)}$を選び，k:=0 とおく.

(1)$\nabla f(\boldsymbol{x}^{(k)})=\mathbf{0}$ ならば計算終了．さもなければ

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^{(k)})\boldsymbol{d} = -\nabla f(\boldsymbol{x}^{(k)})$$

の解$\boldsymbol{d}^{(k)}$を求め，ステップ(2)へ.

(2) 次の点を　$\boldsymbol{x}^{(k+1)} := \boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{d}^{(k)}$　とする.

k:= k +1とおいてステップ(1)へ戻る.

２. (3) $\nabla^2 f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{d} = -\nabla f(\boldsymbol{x})$

$$f(\boldsymbol{x}) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 6x_1 - 10x_2$$

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 6x_1 - 2x_2 + 6 \\ -2x_1 + 6x_2 - 10 \end{bmatrix}$$

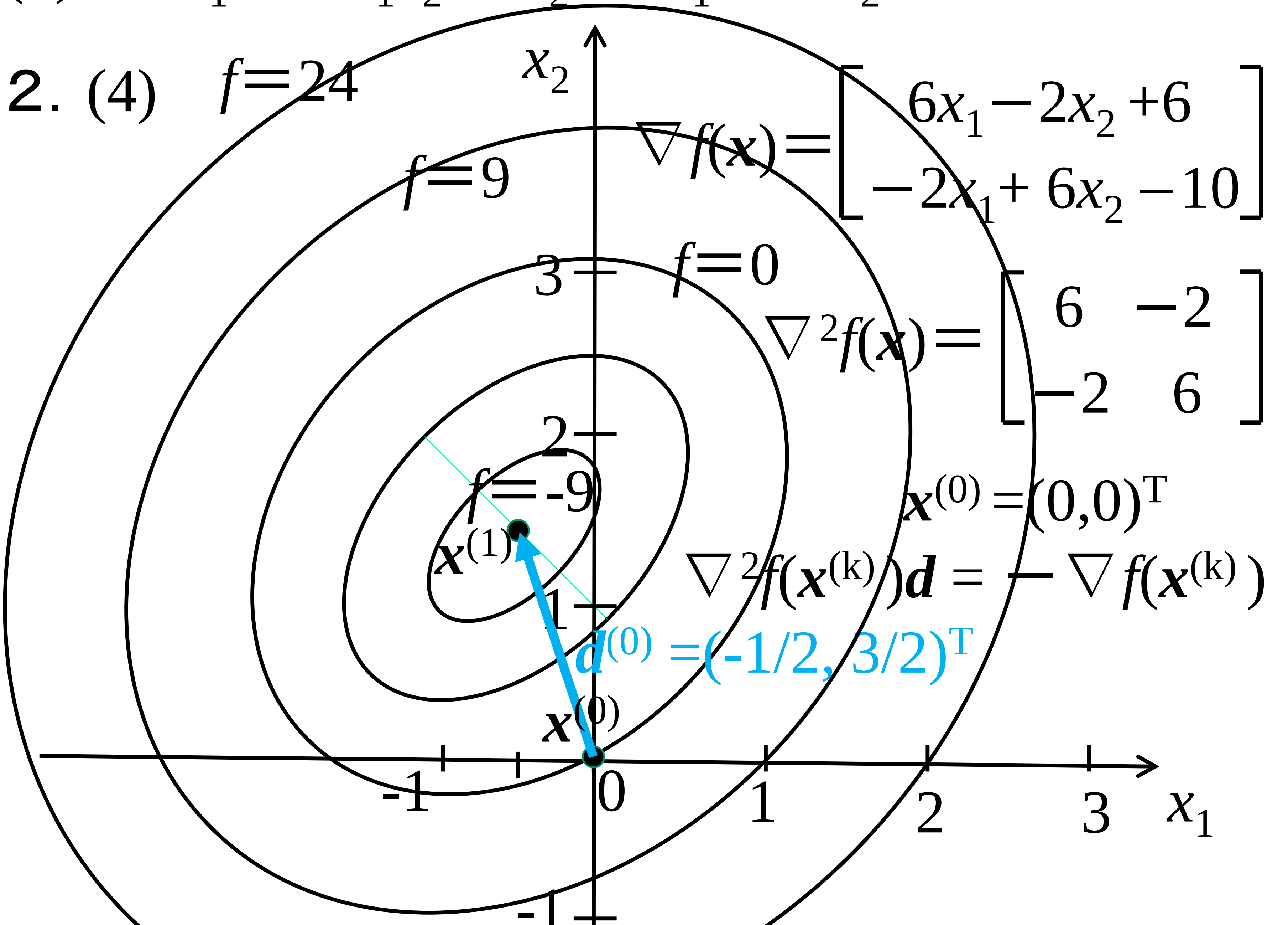
$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{x} = (0, 0)^{\mathrm{T}}$　のとき

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} -6 \\ 10 \end{bmatrix} \longrightarrow \boldsymbol{d} = (-1/2,\ 3/2)^{\mathrm{T}}$$

$f(\boldsymbol{x}) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 6x_1 - 10x_2$ の等高線

２. (4)



$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 6x_1 - 2x_2 + 6 \\ -2x_1 + 6x_2 - 10 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = (0,0)^T$$

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^{(k)})\boldsymbol{d} = -\nabla f(\boldsymbol{x}^{(k)})$$

$$f(\boldsymbol{x}) = (x_1 - 1)^2 + 10(x_1{}^2 - x_2)^2$$

３. (1)

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2(x_1 - 1) + 40(x_1{}^2 - x_2)x_1 \\ -20(x_1{}^2 - x_2) \end{bmatrix}$$

３. (2)

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2 + 120x_1{}^2 - 40x_2 & -40x_1 \\ -40x_1 & 20 \end{bmatrix}$$

３. (3)

$\boldsymbol{x}^* = (1, 1)^{\mathrm{T}}$ のとき $\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^*) = \begin{bmatrix} 82 & -40 \\ -40 & 20 \end{bmatrix}$

３. (4)

$$A = \nabla^2 f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 82 & -40 \\ -40 & 20 \end{bmatrix}$$

$$|tE - A| = \begin{vmatrix} t-82 & 40 \\ 40 & t-20 \end{vmatrix} = t^2 - 102t + 40 = 0$$

$$\lambda = 101.6,\ 0.4$$

条件数 $\gamma = \lambda max／\lambda min = 101.6／0.4 \fallingdotseq 254$

3. (5)

$$\boldsymbol{d} = -\nabla f(\boldsymbol{x})$$

$$f(\boldsymbol{x}) = (x_1 - 1)^2 + 10(x_1{}^2 - x_2)^2$$

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2(x_1 - 1) + 40(x_1{}^2 - x_2)x_1 \\ -20(x_1{}^2 - x_2) \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{x} = (0, 1)^{\mathrm{T}}$　のとき

$$\boldsymbol{d} = (2, -20)^{\mathrm{T}}$$

3．(6)

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{d} = -\nabla f(\boldsymbol{x})$$

$$f(\boldsymbol{x}) = (x_1 - 1)^2 + 10(x_1{}^2 - x_2)^2$$

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2(x_1 - 1) + 40(x_1{}^2 - x_2)x_1 \\ -20(x_1{}^2 - x_2) \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2 + 120x_1{}^2 - 40x_2 & -40x_1 \\ -40x_1 & 20 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{x} = (0, 0)^{\mathrm{T}}$　のとき

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \boldsymbol{d} = (1,0)^{\mathrm{T}}$$

表 4.1　関数 (4.19) に対する最急降下法の計算結果

反復 k	$\boldsymbol{x}^{(k)}$	$f(\boldsymbol{x}^{(k)})$	$\|\nabla f(\boldsymbol{x}^{(k)})\|$
0	$(0.00000, 1.00000)$	0.11000×10^{2}	0.20099×10^{2}
1	$(0.09988, 0.00115)$	0.81098×10^{0}	0.17737×10^{1}
2	$(0.36070, 0.02723)$	0.51452×10^{0}	0.20677×10^{1}
3	$(0.35167, 0.11761)$	0.42069×10^{0}	0.12174×10^{1}
4	$(0.44424, 0.12687)$	0.35853×10^{0}	0.14166×10^{1}
5	$(0.43824, 0.18689)$	0.31583×10^{0}	0.10381×10^{1}
10	$(0.57217, 0.28642)$	0.19981×10^{0}	0.82338×10^{0}
20	$(0.67723, 0.43291)$	0.11080×10^{0}	0.51716×10^{0}
30	$(0.73949, 0.52795)$	0.71432×10^{-1}	0.37970×10^{0}
40	$(0.78289, 0.59811)$	0.49328×10^{-1}	0.29770×10^{0}
50	$(0.81555, 0.65307)$	0.35472×10^{-1}	0.24213×10^{0}
100	$(0.90619, 0.81570)$	0.91002×10^{-2}	0.11011×10^{0}
200	$(0.96896, 0.93721)$	0.99136×10^{-2}	0.33934×10^{-1}
300	$(0.98869, 0.97691)$	0.13148×10^{-3}	0.12106×10^{-1}
400	$(0.99575, 0.99130)$	0.18520×10^{-4}	0.45109×10^{-2}
500	$(0.99838, 0.99669)$	0.26650×10^{-5}	0.17065×10^{-2}

表 **4.2**　関数 (4.19) に対するニュートン法の計算結果

反復 k	$\boldsymbol{x}^{(k)}$	$f(\boldsymbol{x}^{(k)})$	$\|\nabla f(\boldsymbol{x}^{(k)})\|$
0	$(0.00000, 0.00000)$	0.10000×10^{1}	0.20000×10^{1}
1	$(0.32341, 0.00000)$	0.56717×10^{0}	0.20919×10^{1}
2	$(0.73455, 0.46247)$	0.12990×10^{0}	0.23209×10^{1}
3	$(0.91297, 0.85632)$	0.12775×10^{-1}	0.11054×10^{1}
4	$(1.00450, 1.01041)$	0.39429×10^{-4}	0.54177×10^{-1}
5	$(0.99997, 0.99995)$	0.16624×10^{-8}	0.46482×10^{-3}
6	$(1.00000, 1.00000)$	0.39340×10^{-17}	0.17062×10^{-7}

表 4.3　関数 (4.19) に対する準ニュートン法 (BFGS 法) の計算結果

反復 k	$\boldsymbol{x}^{(k)}$	$f(\boldsymbol{x}^{(k)})$	$\|\nabla f(\boldsymbol{x}^{(k)})\|$
0	$(0.00000, 1.00000)$	0.11000×10^{2}	0.20099×10^{2}
1	$(0.09988, 0.00115)$	0.81098×10^{0}	0.17737×10^{1}
2	$(0.32845, 0.00381)$	0.55927×10^{0}	0.20815×10^{1}
3	$(0.63413, 0.29092)$	0.25752×10^{0}	0.30512×10^{1}
4	$(0.64276, 0.41585)$	0.12769×10^{0}	0.78598×10^{0}
5	$(0.83666, 0.66037)$	0.42380×10^{-1}	0.12754×10^{1}
6	$(0.99543, 0.99483)$	0.17689×10^{-3}	0.18421×10^{0}
7	$(1.00116, 1.00249)$	0.16527×10^{-5}	0.58349×10^{-2}
8	$(0.99998, 0.99998)$	0.10160×10^{-8}	0.43471×10^{-3}
9	$(1.00000, 1.00000)$	0.54333×10^{-12}	0.33545×10^{-5}

＜最急降下法＞

＜大域的収束性をもつ＞　長所

出発点をどこに選んでも、なんらかの解に
収束することが理論的に保証されている

＜1次収束＞　収束の速さはあまり優れない

＜ニュートン法＞

＜2次収束＞　収束が速い

＜局所的収束性をもつが，
大域的収束性をもたない＞　短所

＜準ニュートン法＞

＜超1次収束＞＜ほぼ大域的収束性を保証＞

信頼性（大域的収束性）と計算効率（収束の速さ）の両
面で非常に優れた方法。実際に広く用いられている。

(a) 最急降下法　(b) ニュートン法　(c) 準ニュートン法

４. (1)　(a)　(c)　(b)

４. (2)　(b)　(c)　(a)

４. (3)　(c)

＜ナップサック問題＞

n個の品物がある．品物iの重さ：$a_i$kg　利用価値：c_i とする．ナップサックには全部で$b$kgしか詰めない．利用価値の総計が最大となる品物を選ぶにはどうすればよいか．

目的関数：$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \longrightarrow$ 最大

制約条件：$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqq b$

$$x_i = 0,1 \quad (i=1,..,n)$$

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{品物}i\text{を選ぶとき} \\ 0, & \text{品物}i\text{を選ばないとき} \end{cases}$$

例）ナップサック問題

目的関数：$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \longrightarrow$ 最大

制約条件：$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqq b$

$x_i = 0,1 \quad (i=1,..,n)$

ただし，c_i, a_i, bはすべて正の整数とし，

$$\frac{c_1}{a_1} \geqq \frac{c_2}{a_2} \geqq \cdots \geqq \frac{c_n}{a_n}$$

となるように，まえもって変数の添字iは並べ換えられていると仮定する．

５. (1)

目的関数: $3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \longrightarrow$ 最大

制約条件: $2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leqq 4$

$$x_i = 0,1 \quad (i=1,..,4)$$

＜連続緩和問題＞

目的関数: $3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \longrightarrow$ 最大

制約条件: $2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leqq 4$

$$0 \leqq x_i \leqq 1 \quad (i=1,..,4)$$

５. (2)

＜連続緩和問題＞

目的関数:　$3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \longrightarrow$ 最大

制約条件:　$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leqq 4$

$$0 \leqq x_i \leqq 1 \quad (i=1,..,4)$$

$x_1 = 1$　成り立つ

$2 + 3x_2 \leqq 4$　より　$x_2 = 2/3$

$x_3 = x_4 = 0$

最適解: $x = (1, 2/3, 0, 0)^T$ 元の問題の実数最適解

目的関数の値 $z = 17/3$

連続緩和問題は元の問題の目的関数値の上界値を与える.

連続緩和問題の実数最適解により，元の問題の近似最適解を容易に得ることができる.

＜分枝図＞

- 最上部の節点：どの変数も固定されていない状態
- 最下部の節点：すべての変数が0または1に固定された状態
- 途中の節点：一部の変数の値が0または1に固定され，それ以外の変数は固定されていないような問題

→ 部分問題

５. (3)

実数最適解: $x = (1, 2/3, 0, 0)^T$

近似最適解: $x = (1, 0, 1, 0)^T$

５. (4)

暫定解: $x = (1, 0, 1, 0)^T$　暫定値: $z^* = 4$

(a) $x_1 = 0$ に固定した部分問題

目的関数:　$4x_2 + x_3 + 2x_4 \longrightarrow$ 最大

制約条件:　$3x_2 + x_3 + 3x_4 \leqq 4$

$x_i = 0,1 \quad (i=2,..,4)$

＜連続緩和問題＞

目的関数:　$4x_2 + x_3 + 2x_4 \longrightarrow$ 最大

制約条件:　$3x_2 + x_3 + 3x_4 \leqq 4$

$0 \leqq x_i \leqq 1 \quad (i=2,..,4)$

実数最適解: $(x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 0)^T$

部分問題の最適解 $x = (0, 1, 1, 0)^T$ が得られた

$\longrightarrow$ 終端できる

(b) $x_1 = 1,\quad x_2 = 0$ に固定した部分問題

目的関数： $3 + x_3 + 2x_4 \longrightarrow$ 最大

制約条件： $2 + x_3 + 3x_4 \leqq 4$

$x_i = 0,1 \quad (i=3,4)$

＜連続緩和問題＞

目的関数： $3 + x_3 + 2x_4 \longrightarrow$ 最大

制約条件： $2 + x_3 + 3x_4 \leqq 4$

$0 \leqq x_i \leqq 1 \quad (i=3,4)$

実数最適解： $(x_3, x_4) = (1, 1/3)^T \qquad z=14/3$

目的関数値が暫定値z*=4より大きい

$\longrightarrow$ 終端できない

(c) $x_1 = 1$,　$x_2 = 1$ に固定した部分問題

目的関数：　$7 + x_3 + 2x_4$ ⟶ 最大

制約条件：　$5 + x_3 + 3x_4 \leqq 4$

$x_i = 0,1 \quad (i=3,4)$

明らかに実行可能解をもたない

⟶　終端できる

５. (5)　分枝限定法の適用

(0)　５. (3)で求めた近似最適解を暫定解とする。

暫定解: $x = (1, 0, 1, 0)^T$　　暫定値: $z^* = 4$

(1) $x_1 = 0$ に固定した部分問題を解く

５. (4)(a)より部分問題の最適解 $x = (0, 1, 1, 0)^T$ が得られたから終端できる

目的関数値$z=5$ は暫定値$z^*=4$より大きいから、これを新たな暫定解とし、暫定値$z^*=5$とする。

(2) $x_1 = 1$ に固定した部分問題を解く

目的関数: $3+4x_2+x_3+2x_4 \longrightarrow$ 最大

制約条件: $2+3x_2+x_3+3x_4 \leqq 4$

$$x_i = 0,1 \quad (i=2,..,4)$$

＜連続緩和問題＞

目的関数: $3+4x_2+x_3+2x_4 \longrightarrow$ 最大

制約条件: $2+3x_2+x_3+3x_4 \leqq 4$

$$0 \leqq x_i \leqq 1 \quad (i=2,..,4)$$

実数最適解: $(x_2, x_3, x_4) = (2/3, 0, 0)^T$

目的関数値z=17/3 は暫定値z＊=5より大きいから、最適解を含む可能性がある。そこで新たな部分問題を生成する。

(3) $x_1 = 1, \quad x_2 = 0$ に固定した部分問題を解く

５．(4)(b)より部分問題の実数最適解：$(x_3, x_4) = (1, 1/3)^T$　z=14/3 が得られる。しかしz=14/3は暫定値z＊=5より小さい。
したがたって、この部分問題は終端する。

(4) $x_1 = 1, \quad x_2 = 1$ に固定した部分問題を解く

５．(4)(c)よりこの部分問題は実行可能解をもたない。したがたって、この部分問題は終端する。

(5) すべての部分問題が終端したので、暫定解 $x = (0,1, 1, 0)^T$ が最適解となる。

６. (1)

現在の解（基底解）に対して、非基底変数と基底変数を1つずつ入れ替えることにより生成される解（基底解）の集合

６. (2)

現在の解（フロー）に対する残余ネットワークにおけるいづれかのパスにフローを流すことにより得られる解（フロー）の集合

６. (3)

現在の解（点）における勾配の逆方向にある解（点）の集合

６. (4)

現在の解（巡回路）に対して２本の枝を付け替えることにより得られる解（巡回路）の集合

7

＜メタヒューリスティクス＞

改悪となるような解への移動も許すことによって，好ましくない局所最適解に補足されることを避けようとする方法

＜焼きなまし法（シミュレーティッド・アニーリング法）＞

＜特徴＞

改悪となる解を採用する確率を温度と呼ばれるパラメータを用いて変化させる

＜タブー探索法＞

過去の探索で現れた解や移動のパターンをタブーリストと呼ばれる集合の形で記憶しておき、そのリストに含まれない解のなかで最良のものに移動する