計画数学演習問題３

2018/6/15

A4 レポート用紙で提出。　　　　　　　期限：７月１６日（月）　　事務室

１．次の関数 $f(\boldsymbol{x})$の最小化について以下の問いに答えよ．

$$f(\boldsymbol{x}) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 6x_1 - 10x_2 \quad , \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$$

(1) 勾配$\nabla f(\boldsymbol{x})$を求めよ．

(2) 点 $\boldsymbol{a}\ (0, 0)^{\mathrm{T}}$における関数 f の勾配$\nabla f(\boldsymbol{a})$を求めよ．

(3) ヘッセ行列$\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$を求めよ．

(4) ヘッセ行列$\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(5) 関数 $f(\boldsymbol{x})$の等高線を図示せよ。

(6) 点 $\boldsymbol{a}\ (0, 0)^{\mathrm{T}}$における関数 f の勾配ベクトル$\nabla f(\boldsymbol{a})$を図示せよ．

(7) $f(\boldsymbol{x})$の最小化問題に対する最適性の１次の必要条件を満たす点 $\boldsymbol{x}^*$を求めよ．

(8) (7)で求めた $\boldsymbol{x}^*$が最適性の２次の必要条件および十分条件を満たすかどうか調べよ．

２．次の関数 $f(\boldsymbol{x})$の最小化について以下の問いに答えよ．

$$f(\boldsymbol{x}) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 6x_1 - 10x_2 \quad , \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$$

出発点　$\boldsymbol{x}^{(0)} = (0, 0)^{\mathrm{T}}$　とする．

(1) 最急降下法を適用した場合の探索ベクトル $\boldsymbol{d}^{(0)}$ を求めよ．

(2) (1)で求めた探索ベクトル $\boldsymbol{d}^{(0)}$ を関数 $f(\boldsymbol{x})$の等高線上に図示し、次の点 $\boldsymbol{x}^{(1)}$ を示せ．

(3) ニュートン法を適用した場合の探索ベクトル $\boldsymbol{d}^{(0)}$ を求めよ．

(4) (3)で求めた探索ベクトル $\boldsymbol{d}^{(0)}$ を関数 $f(\boldsymbol{x})$の等高線上に図示し、次の点 $\boldsymbol{x}^{(1)}$ を示せ．

３．次の関数 $f(\boldsymbol{x})$の最小化について以下の問いに答えよ．

$$f(\boldsymbol{x}) = (x_1 - 1)^2 + 10(x_1^2 - x_2)^2 \quad , \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$$

(1) 勾配$\nabla f(\boldsymbol{x})$を求めよ．

(2) ヘッセ行列$\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$を求めよ．

(3) $\boldsymbol{x}^* = (1, 1)^{\mathrm{T}}$　のときのヘッセ行列$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^*)$を求めよ．

(4) (3)で求めたヘッセ行列$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^*)$の固有値と条件数を求めよ．

以下の手法を適用した場合に，点$\boldsymbol{x}$において次の点を探索する方向ベクトル$\boldsymbol{d}$を求めよ．

(5) 最急降下法で　$\boldsymbol{x} = (0, 1)^{\mathrm{T}}$　のとき

(6) ニュートン法で　$\boldsymbol{x} = (0, 0)^{\mathrm{T}}$　のとき

４．制約なし非線形計画問題の代表的な手法として以下の３つが挙げられる．

(a) 最急降下法　　(b) ニュートン法　　(c) 準ニュートン法

(1) 信頼性（大域的収束性）の良い順に並べよ（記号で回答）．

(2) 計算効率（収束の速さ）の良い順に並べよ（記号で回答）．

(3) 実用上最も有効とされるのはどれか（記号で回答）．

５．次のナップサック問題について以下の問いに答えよ．

目的関数：$3x_1+4x_2+x_3+2x_4 \longrightarrow$ 最大

制約条件：$2x_1+3x_2+x_3+3x_4 \leqq 4$

$x_i=0,1 \quad (i=1,\ldots,4)$

(1) 連続緩和問題を定式化せよ．

(2) 連続緩和問題の最適解（実数最適解）を求めよ．

(3) (2)で求めた実数最適解を修正することにより、近似最適解を求めよ．

(4) (3)で求めた近似最適解を暫定解として分枝限定法を適用する．このとき，以下の部分問題が終端できるかどうか判定せよ．

(a) $x_1=0$ に固定した部分問題

(b) $x_1=1$，$x_2=0$ に固定した部分問題

(c) $x_1=1$，$x_2=1$ に固定した部分問題

(5) 分枝限定法を用いて最適解を求めよ．

６．以下の手法を局所探索法と考えたとき，近傍はどのように定義されるか.

(1) 線形計画問題に対するシンプレックス法

(2) 最大流問題に対するフロー増加法

(3) 制約なし非線形計画問題に対する最急降下法

(4) 巡回セールスマン問題に対する 2-opt 法

７．組合せ計画問題に対するメタヒューリスティクスの例を挙げ，その特徴を述べよ．