

計画数学演習問題 3

2017/6/9

A4 レポート用紙で提出。

期限：7月14日（金）

事務室

1. 次の関数 $f(\mathbf{x})$ の最小化について以下の問いに答えよ.

$$f(\mathbf{x}) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 6x_1 - 10x_2, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$$

- (1) 勾配 $\nabla f(\mathbf{x})$ を求めよ.
- (2) 点 $\mathbf{a} (0, 0)^T$ における関数 f の勾配 $\nabla f(\mathbf{a})$ を求めよ.
- (3) ヘッセ行列 $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ を求めよ.
- (4) ヘッセ行列 $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.
- (5) 関数 $f(\mathbf{x})$ の等高線を図示せよ.
- (6) 点 $\mathbf{a} (0, 0)^T$ における関数 f の勾配ベクトル $\nabla f(\mathbf{a})$ を図示せよ.
- (7) $f(\mathbf{x})$ の最小化問題に対する最適性の1次の必要条件を満たす点 \mathbf{x}^* を求めよ.
- (8) (7) で求めた \mathbf{x}^* が最適性の2次の必要条件および十分条件を満たすかどうか調べよ.

2. 次の関数 $f(\mathbf{x})$ の最小化について以下の問いに答えよ.

$$f(\mathbf{x}) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 6x_1 - 10x_2, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$$

出発点 $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0)^T$ とする.

- (1) 最急降下法を適用した場合の探索ベクトル $\mathbf{d}^{(0)}$ を求めよ.
- (2) (1) で求めた探索ベクトル $\mathbf{d}^{(0)}$ を関数 $f(\mathbf{x})$ の等高線上に図示し、次の点 $\mathbf{x}^{(1)}$ を示せ.
- (3) ニュートン法を適用した場合の探索ベクトル $\mathbf{d}^{(0)}$ を求めよ.
- (4) (3) で求めた探索ベクトル $\mathbf{d}^{(0)}$ を関数 $f(\mathbf{x})$ の等高線上に図示し、次の点 $\mathbf{x}^{(1)}$ を示せ.

3. 次の関数 $f(\mathbf{x})$ の最小化について以下の問いに答えよ.

$$f(\mathbf{x}) = (x_1 - 1)^2 + 10(x_1^2 - x_2)^2, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$$

- (1) 勾配 $\nabla f(\mathbf{x})$ を求めよ.
 - (2) ヘッセ行列 $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ を求めよ.
 - (3) $\mathbf{x}^* = (1, 1)^T$ のときのヘッセ行列 $\nabla^2 f(\mathbf{x}^*)$ を求めよ.
 - (4) (3) で求めたヘッセ行列 $\nabla^2 f(\mathbf{x}^*)$ の固有値と条件数を求めよ.
- 以下の手法を適用した場合に、点 \mathbf{x} において次の点を探索する方向ベクトル \mathbf{d} を求めよ.
- (5) 最急降下法で $\mathbf{x} = (0, 1)^T$ のとき
 - (6) ニュートン法で $\mathbf{x} = (0, 0)^T$ のとき

4. 制約なし非線形計画問題の代表的な手法として以下の3つが挙げられる.

(a) 最急降下法 (b) ニュートン法 (c) 準ニュートン法

- (1) 信頼性（大域的収束性）の良い順に並べよ（記号で回答）.
- (2) 計算効率（収束の速さ）の良い順に並べよ（記号で回答）.
- (3) 実用上最も有効とされるのはどれか（記号で回答）.

5. 次のナップサック問題について以下の問いに答えよ.

目的関数： $3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \longrightarrow$ 最大

制約条件： $2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 4$

$$x_i = 0, 1 \quad (i=1, \dots, 4)$$

- (1) 連続緩和問題を定式化せよ.
- (2) 連続緩和問題の最適解（実数最適解）を求めよ.
- (3) (2)で求めた実数最適解を修正することにより、近似最適解を求めよ.
- (4) (3)で求めた近似最適解を暫定解として分枝限定法を適用する. このとき、以下の部分問題が終端できるかどうか判定せよ.
 - (a) $x_1 = 0$ に固定した部分問題
 - (b) $x_1 = 1, x_2 = 0$ に固定した部分問題
 - (c) $x_1 = 1, x_2 = 1$ に固定した部分問題
- (5) 分枝限定法を用いて最適解を求めよ.

6. 以下の手法を局所探索法と考えたとき、近傍はどのように定義されるか.

- (1) 線形計画問題に対するシンプレックス法
- (2) 最大流問題に対するフロー増加法
- (3) 制約なし非線形計画問題に対する最急降下法
- (4) 巡回セールスマン問題に対する 2-opt 法

7. 組合せ計画問題に対するメタヒューリスティクスの例を挙げ、その特徴を述べよ.