ネットワークモデル

<グラフとネットワーク＞

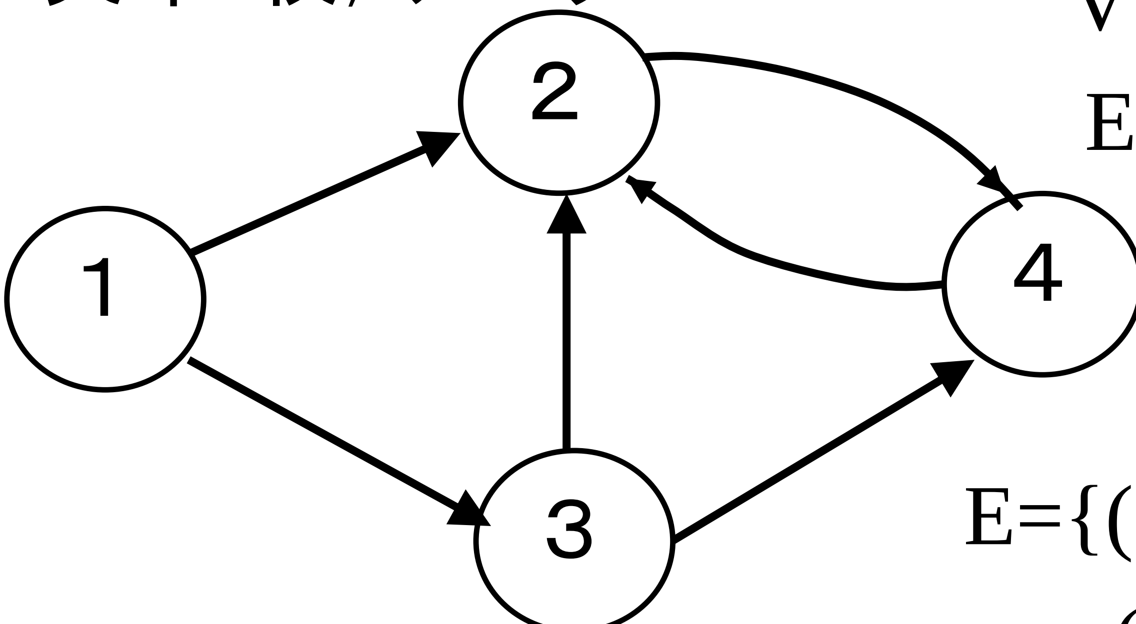
点 : 節点，ノード

矢印 : 枝，アーク

枝(i,j):節点iから節点jへの枝

V : 節点全体の集合

E : 枝全体の集合



有向グラフ

V={1,2,3,4}

E={(1,2), (1,3), (2,4), (3,2),(3,4),(4,2)}

ネットワーク計画

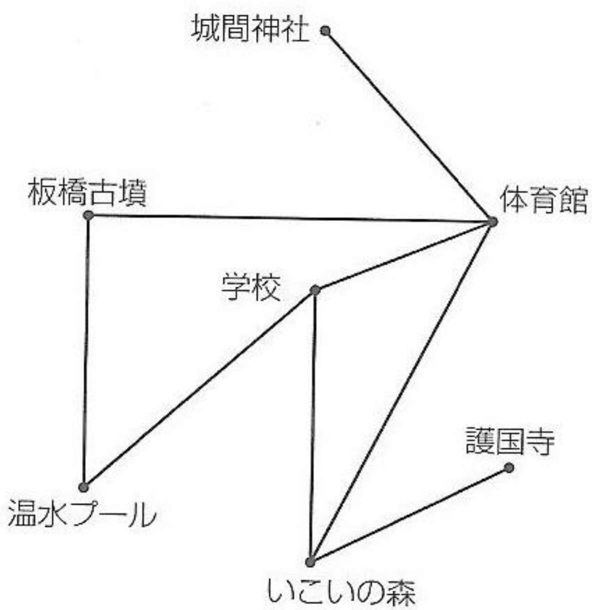
線形計画問題の特別な場合

- 最小木問題
- 最短路問題
- 最長路問題（PERT：日程計画）
- 最大流問題
- 最小費用流問題
- マッチング問題（割当問題）

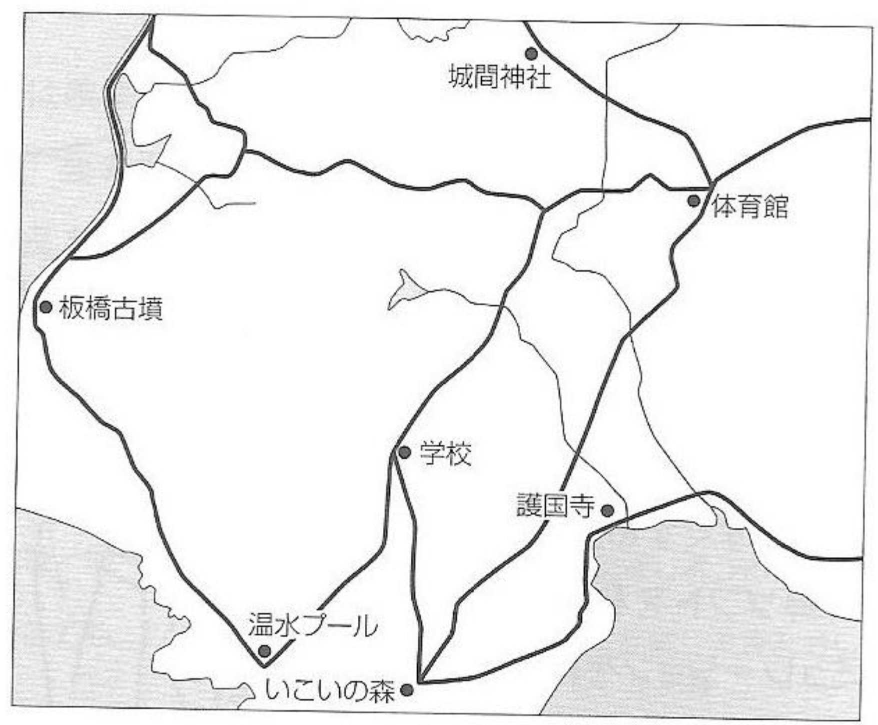
グラフの基礎

ここでは，いくつかのグラフの具体例を示すことにより，グラフの基礎概念を学習しよう。無向グラフ，有向グラフや完全グラフなどグラフの基礎的事項，グラフの接続関係を示す接続行列を学習しよう。また，自動販売機の簡単な例をもとに状態遷移図の考え方について学習しよう。

例題1　地図をグラフにする



■図1　道路図のグラフ



例題2 親子関係をグラフにする

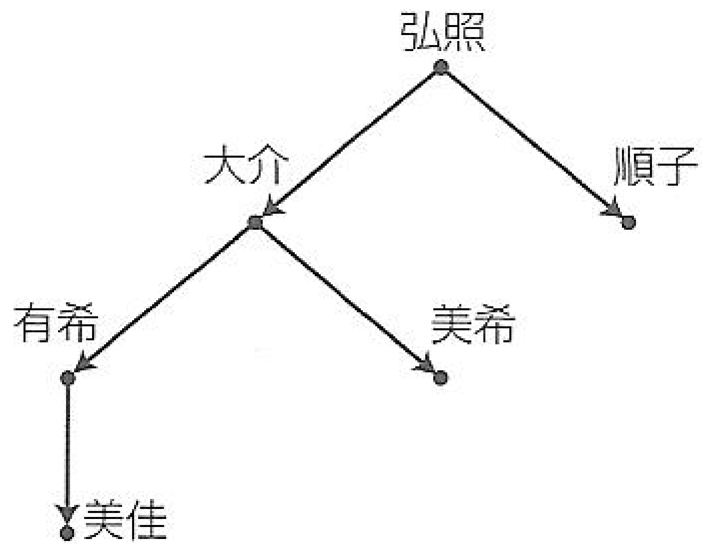
次のような関係があるとき，グラフにしてみよう。

(1) 美希さんの父（大介さん）は，弘照(ひろてる)さんの息子である。

(2) 弘照さんには，子どもが 2 人いる。

(3) 順子さんは，美希さんの父の妹である。

(4) 美希さんの姉（有希さん）には，子ども（美佳ちゃん）が 1 人いる。



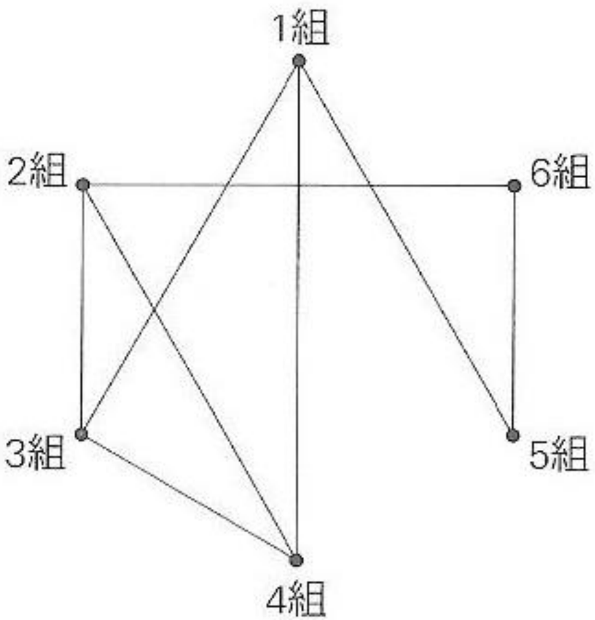
■図2 親子関係のグラフ

例題3　クラスマッチの対戦をグラフにする

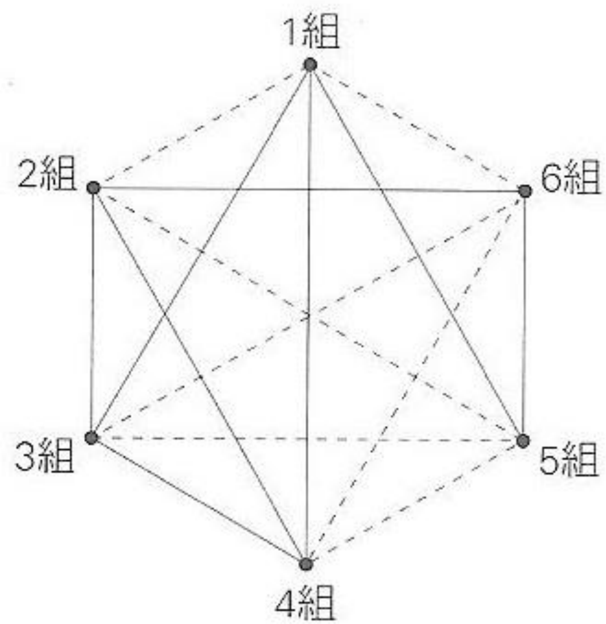
美希さんの学校では，毎年春，放課後にすべてのクラスと1回ずつ試合をするクラスマッチを行っている。美希さんの学年は6クラスで，現在試合が終わっているバレーボールの対戦相手は次のとおりである。関係をグラフであらわしてみよう。

1組－3，4，5組　　2組－3，4，6組　　3組－1，2，4組

4組－1，2，3組　　5組－1，6組　　6組－2，5組



■図3　対戦相手のグラフ



■図4　完全グラフ

例題5　接続行列を求める

例題１の道路図のグラフの接続行列を求めてみよう。

手順

▶1．接続状態を表にする

例題１のグラフの節点をn１～n７，枝をe１～e８とする。グラフの節点と枝が接続されているときは1，接続されていないときは0とすると，接続状態は表２のようになる。

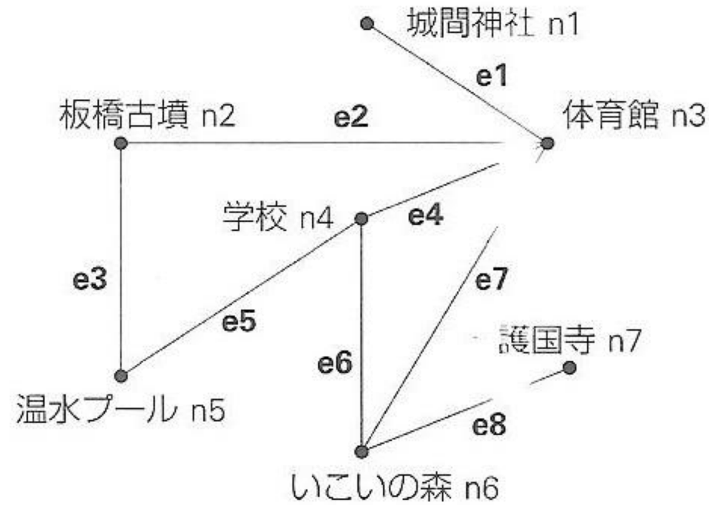
■表2　接続状態

節点＼枝	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8
n1	1	0	0	0	0	0	0	0
n2	0	1	1	0	0	0	0	0
n3	1	1	0	1	0	0	1	0
n4	0	0	0	1	1	1	0	0
n5	0	0	1	0	1	0	0	0
n6	0	0	0	0	0	1	1	1
n7	0	0	0	0	0	0	0	1

▶ 2. 接続行列を求める

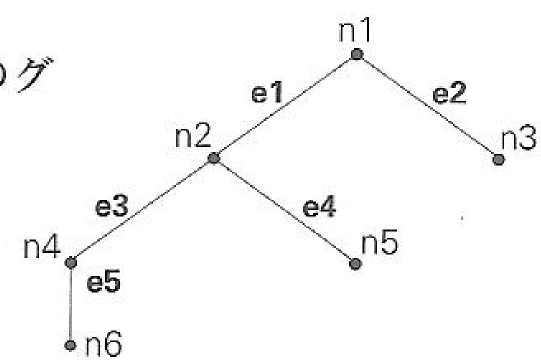
この表から求められる接続行列は，次のようになる②。また，接続行列では枝に必ず 2 つの節点がつながっており，どの列も 1 が 2 個あることがわかる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



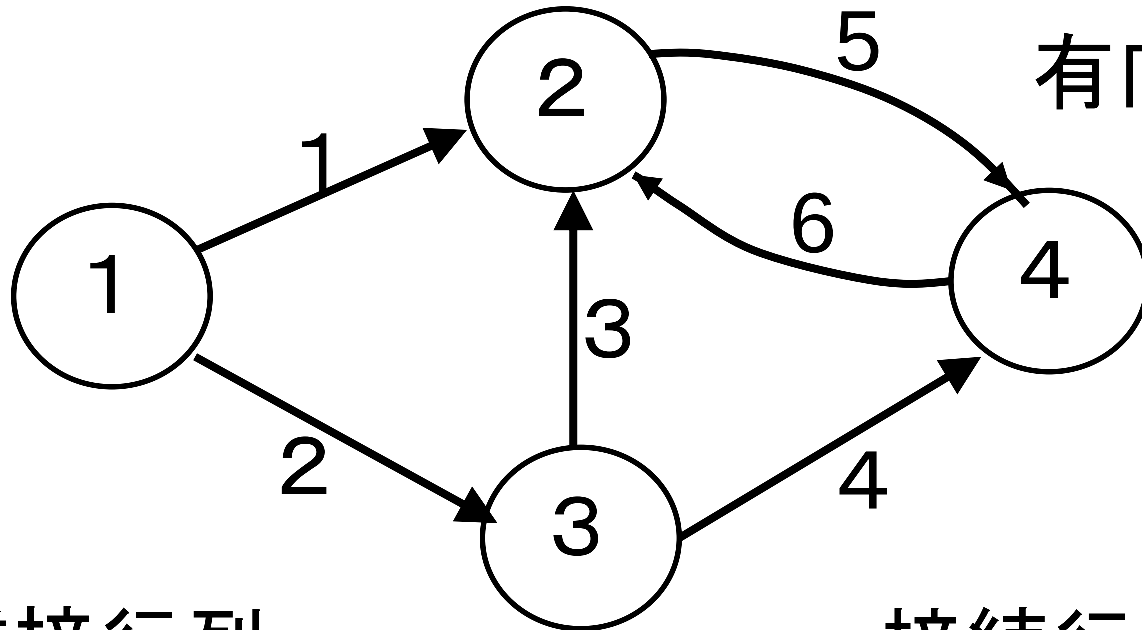
■図6　道路図のグラフ

問5 右の図は，例題 2 図 2 の矢印を消したグラフである。このグラフの接続行列を求めなさい。



グラフと行列

有向グラフ



隣接行列

$$
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

接続行列

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\
0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1
\end{bmatrix}
$$

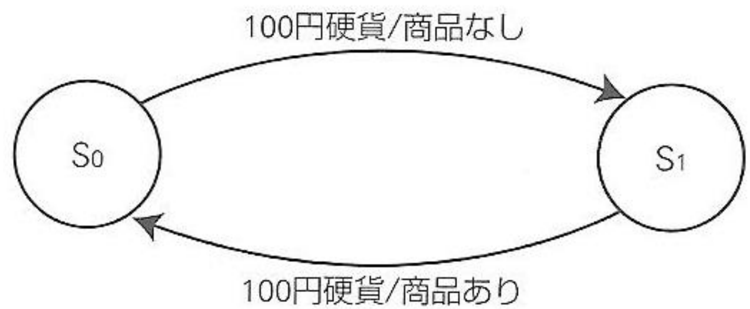
状態遷移図

例題6　自動販売機の状態遷移を考える（1）

200円の商品を売っている自動販売機がある。投入する硬貨は100円だけとして，商品を購入する場合の状態遷移を考えよう。

投入される硬貨は100円だけなので，硬貨が何も投入されていない０円の状態（最初の状態），硬貨が投入された100円の状態がある。また，200円の状態のときに商品が出るようにしなければならない。

ここで，０円の状態をS_0，100円の状態をS_1とする。また，入力は100円硬貨，出力は200円の商品とすると，状態の遷移を図８のような状態遷移図であらわすことができる①。



■図8　状態遷移図

■表3　状態遷移表

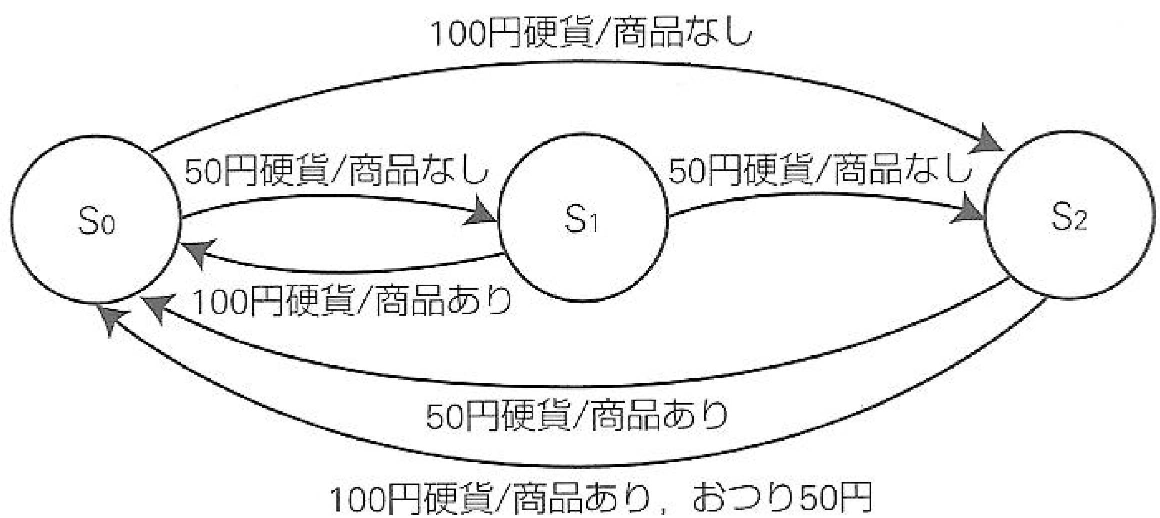
現在の状態 ＼ 入力・出力	入力（100円硬貨）	
	次の状態	出力（200円商品）
0円の状態　S_0	S_1	なし
100円の状態　S_1	S_0	あり

例題7　自動販売機の状態遷移を考える（2）

自動販売機に50円と100円を投入して，150円の商品を購入する場合の状態遷移表を作成しよう。

■表4　自動販売機の状態遷移表

入力・出力 ＼ 現在の状態	入力（50円硬貨）			入力（100円硬貨）		
	次の状態	出力 商品	出力 おつり	次の状態	出力 商品	出力 おつり
0円の状態　S_0	S_1	なし	なし	S_2	なし	なし
50円の状態　S_1	S_2	なし	なし	S_0	あり	なし
100円の状態 S_2	S_0	あり	なし	S_0	あり	50円



図的モデルは，物，人や情報の流れ，要素間の接続状態，状態の遷移などを図に表現したモデルである。

図的モデルの作成は，一般的に次のような手順で行う。

①対象がどのような要素から構成されているのかみつけだす

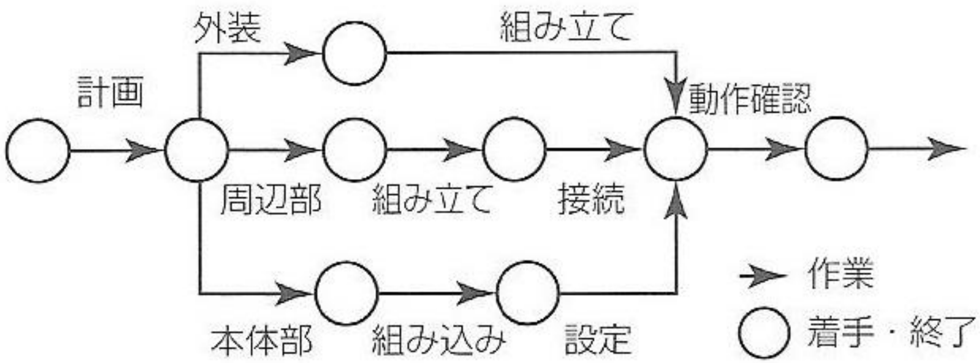
②要素の間にどのような関係があるのか明らかにする

③図記号を用いて要素間の関係をあらわす

図記号を用いたあらわし方の基本は，グラフの考え方である。(→p.12)要素を節点に対応させ，要素間の関係を枝に対応させる。また，対象を何のために表現するかという目的に応じて，節点を単なる点であらわしたり円や長方形であらわしたりする。要素間の関係をあらわす枝は線を用いるが，矢印をつけて物や情報や信号の流れる方向を示すことがある。

2――フローモデル

フローモデルは，信号だけでなくシステムを流れる物や人など，広く情報の流れや処理手順,作業工程などをあらわすモデルである。



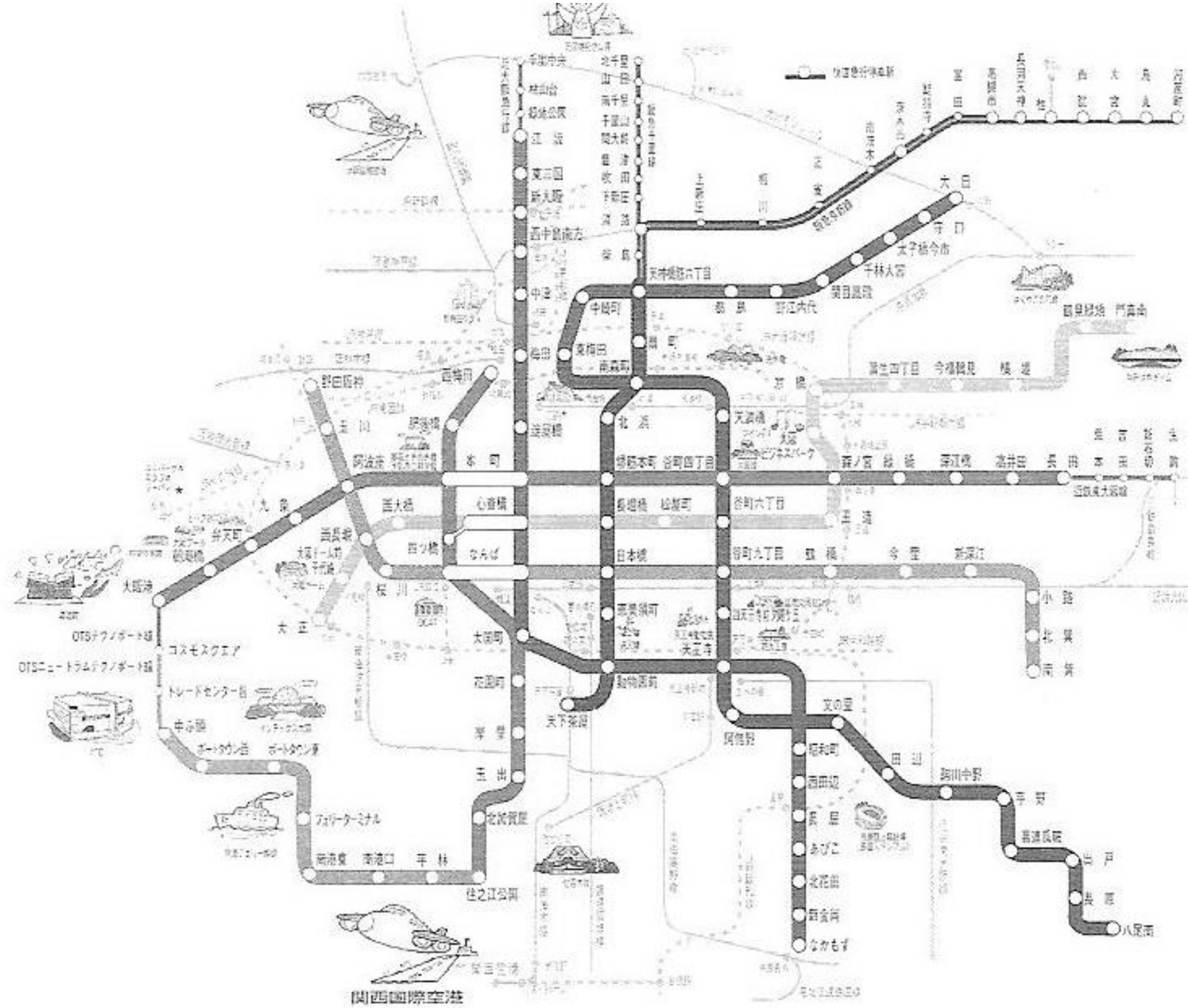
■組み立て作業の工程

フローモデルにはネットワークモデルやフローチャートがある。

ネットワークモデルは，道路網，鉄道網や電力・ガス・水道などの系統をあらわすのによく用いられる。

フローチャートは，コンピュータプログラムや機械の操作手順など，条件によって分岐したりくりかえしたりする複雑な処理手順をあらわすこともできる。

■スポーツのトーナメント



■地下鉄の案内図

例題2　作業工程のモデル化

美希さんのクラスでは，文化祭でカレーの模擬店を出すことになった。文化祭当日の混乱をさけるため，前日までにすべての作業を終わらせたい。少なくとも何日前から取りかかればよいか，また作業に必要な人数は何人か。ネットワークモデルをつくって作業工程を調べてみよう。

手順

▶ 1．基準作業を決定する

まず，１つの工程と思われる作業を考えてこれを基準作業とし，そのリストをつくる。このとき，１つの工程を細かく取りすぎたり，粗すぎたりしないように注意する。

▶ 2．基準作業の条件を考える

次に，各基準作業について必要な日数と，作業に必要な先行の基準作業を決める。

▶ 3．基準作業表の作成

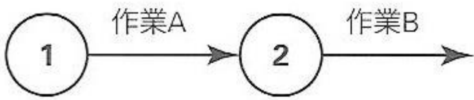
1．2．より，基準作業のリストを作成する。

■表1　基準作業リスト

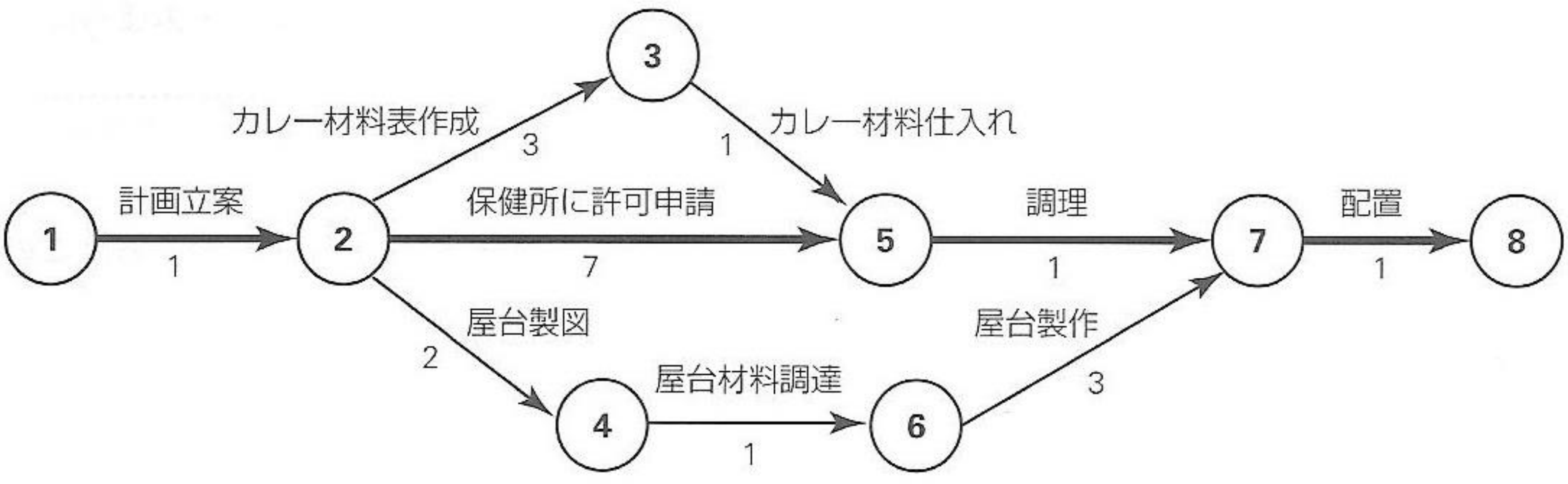
作業内容	先行作業	必要日数	必要人数
計画立案	なし	1	3
保健所に許可申請	計画立案	7	1
カレー材料表作成	計画立案	3	2
カレー材料仕入れ	材料表作成	1	2
調理	仕入れ，許可申請	1	3
配置	調理，屋台製作	1	3
屋台製図	計画立案	2	2
屋台材料調達	屋台製図	1	2
屋台製作	屋台材料調達	3	3

■表1　基準作業リスト

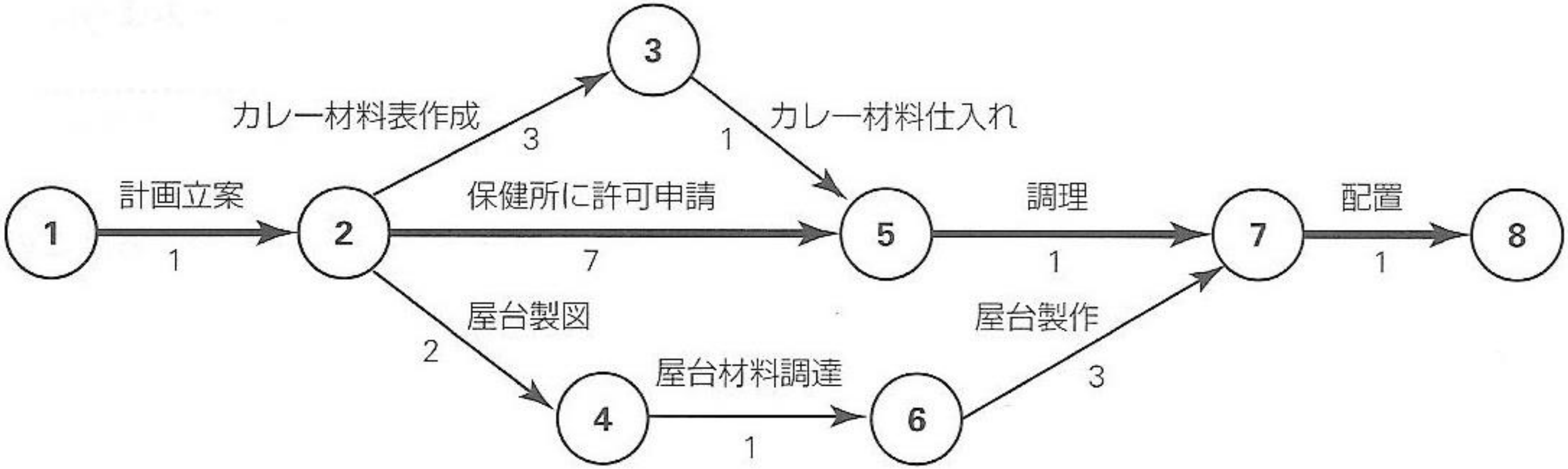
作業内容	先行作業	必要日数	必要人数
計画立案	なし	1	3
保健所に許可申請	計画立案	7	1
カレー材料表作成	計画立案	3	2
カレー材料仕入れ	材料表作成	1	2
調理	仕入れ，許可申請	1	3
配置	調理，屋台製作	1	3
屋台製図	計画立案	2	2
屋台材料調達	屋台製図	1	2
屋台製作	屋台材料調達	3	3



■図5　進行過程のあらわしかた



■図6　カレー模擬店の作業工程のネットワークモデル

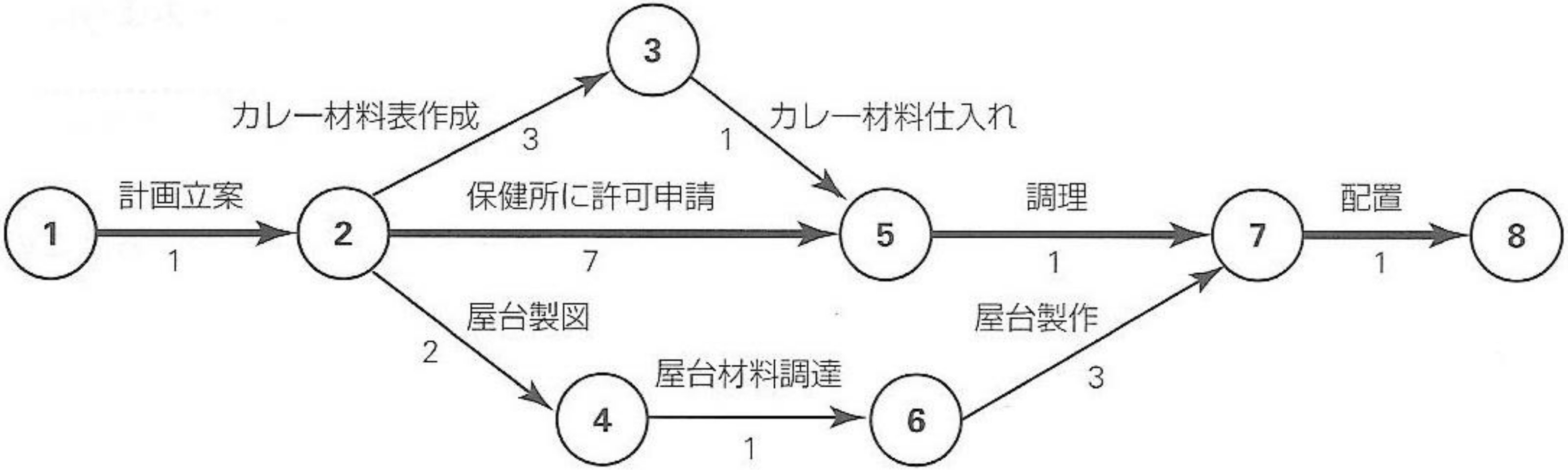


■図6　カレー模擬店の作業工程のネットワークモデル

▶ 5. 作業に必要な日数を求める

ネットワークモデル上の入口1から出口8に到達する最長の経路を求め，太線であらわす（図6）。全所要日数はこれより短くすることができないので，太線上の日数を合計することにより作業に必要な最短日数を求めることができる。

表1の上では作業日数の単純な合計は20日であるが，作業工程図の太線から最短日数は10日であることがわかるので，10日前から作業を開始すればよい。太線上の工程の遅延は全体の遅延になることを意味する。

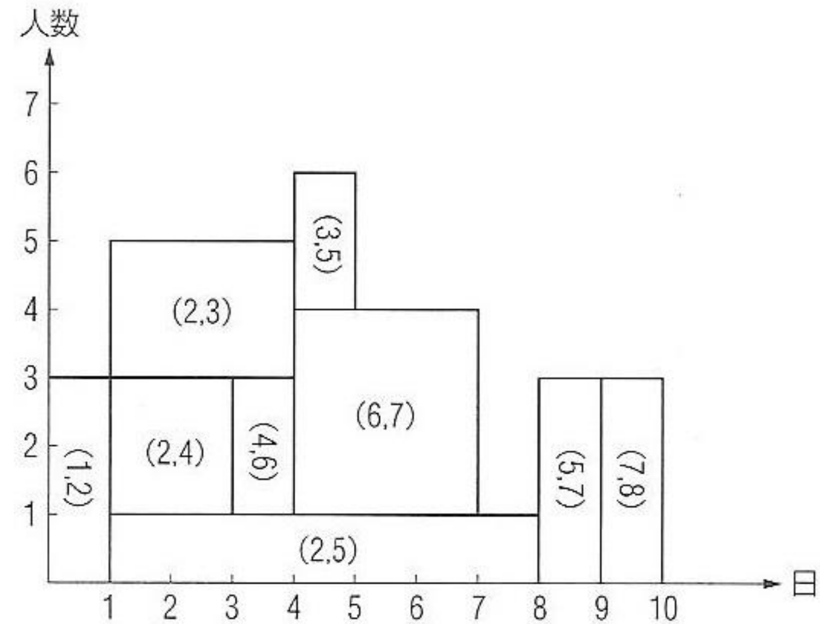


■図6　カレー模擬店の作業工程のネットワークモデル

▶6．作業に必要な人数を求める

各作業をできるだけ前につめて開始したときに作業に必要な人数を求める。そのために，各作業に必要な日数を横，人数を縦の長さにしたブロックをつくり，これを横軸に日数，縦軸に人数をとったグラフとして積み上げていく[①]（図７）。各ブロックがどの作業かがわかるように事象番号を対にして（ ）で囲んであらわす。たとえば「カレー材料仕入れ」のブロックの場合，(3，5）とあらわす。図

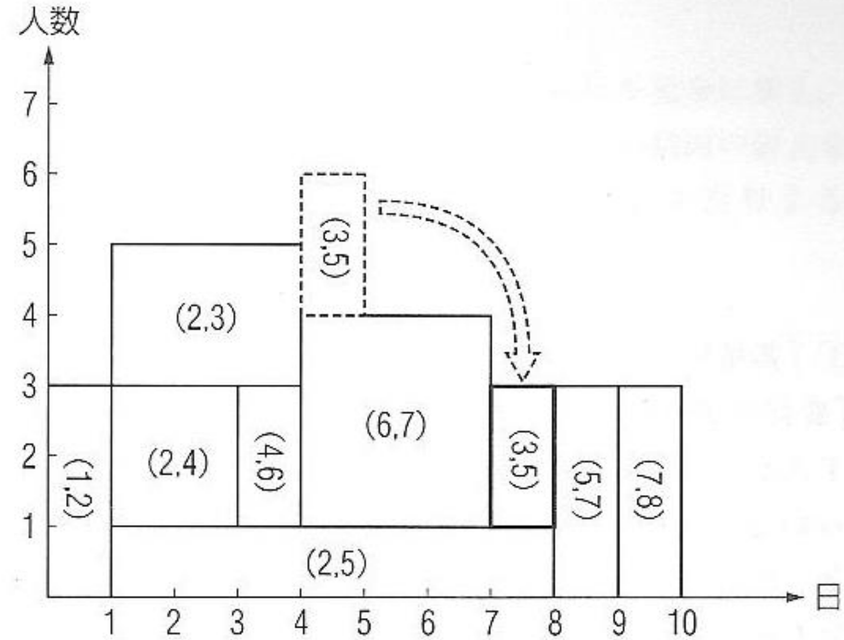
①山づみ表という。



■図7　山づみ表

7より，5日目に最大の人数6名が必要になることがわかる。

また，図の太線の最長経路以外の経路上にある作業は日程に余裕があるので，開始日を前後に移動できる。この作業をみつけて図7の山をくずし，作業工程を変更することができる。図8のように「カレー材料仕入れ」ブロック（3，5）の作業開始日を8日目に動かすと，作業は最大5人ですむことがわかる。

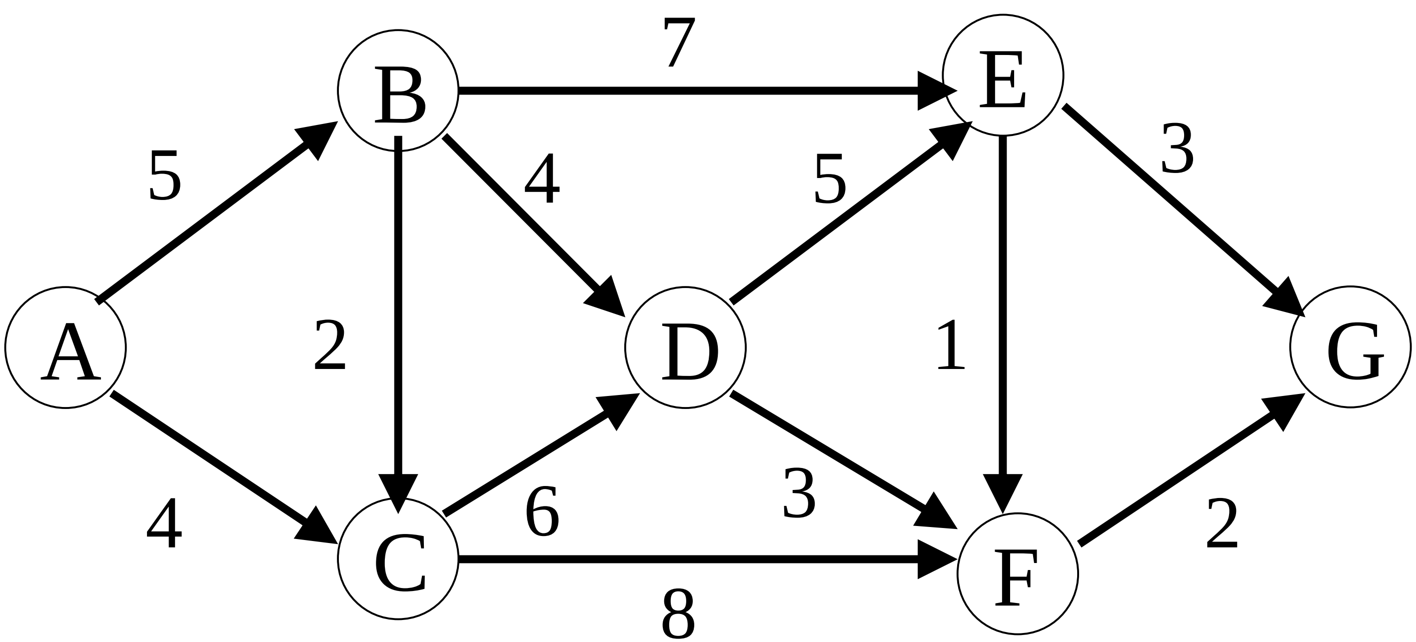


■図8　山をくずした工程調整

問2 例題2で，作業に必要な最大人数が3人ですむようにするには，作業日数を何日延長してスケジュールを組めばよいか，山づみ表をかいて最も短い延長日数を求めなさい。ただし，「調理」の開始をおくらせてもカレー材料は保存できるものとする。

最長路問題

アサイクリックグラフ：閉路を含まない有向グラフ



計算量：$O(|V|+|E|)$

＜PERT：日程計画＞

PERT(program evaluation and review technique)

プロジェクトなどの工程管理

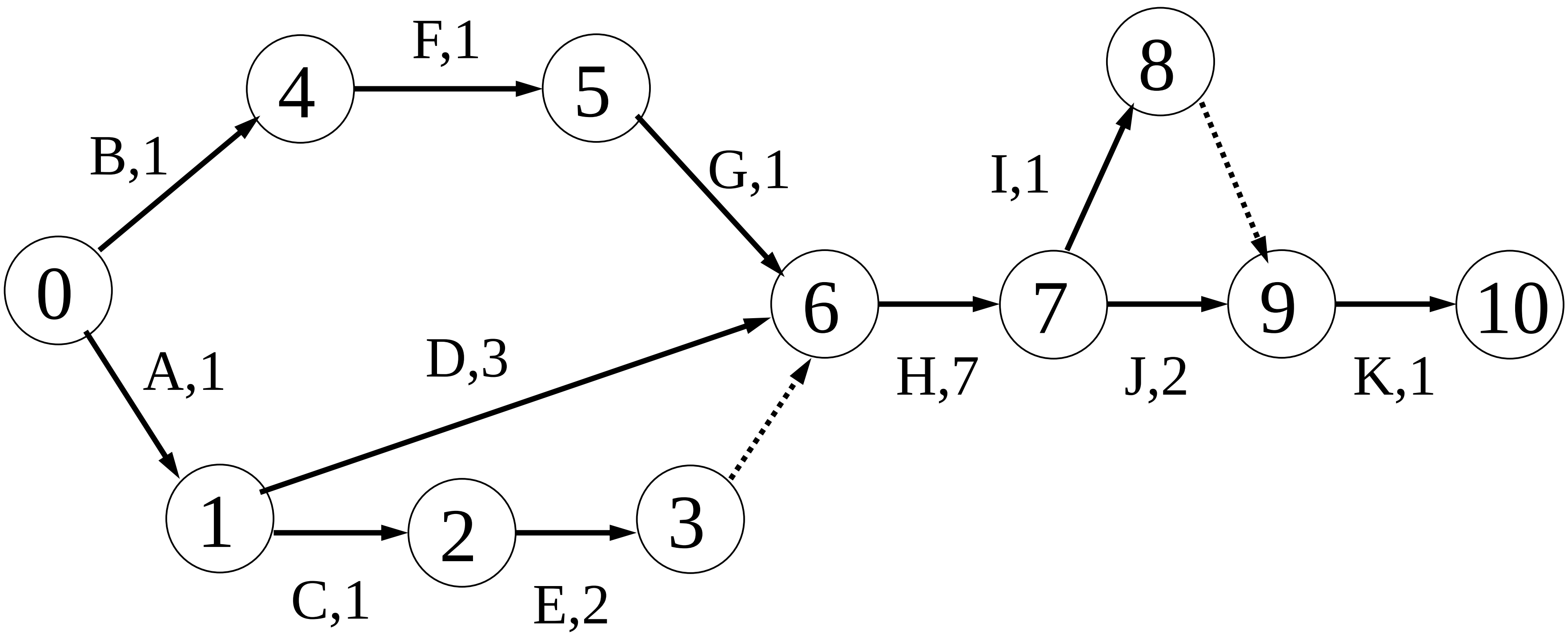
作業名	先行作業	所要日数
A	ー	1
B	ー	1
C	A	1
D	A	3
E	C	2
F	B	1
G	F	1
H	D, E ,G	7
I	H	1
J	H	2
K	I, J	1

アメリカ海軍のポラリス潜水艦開発計画

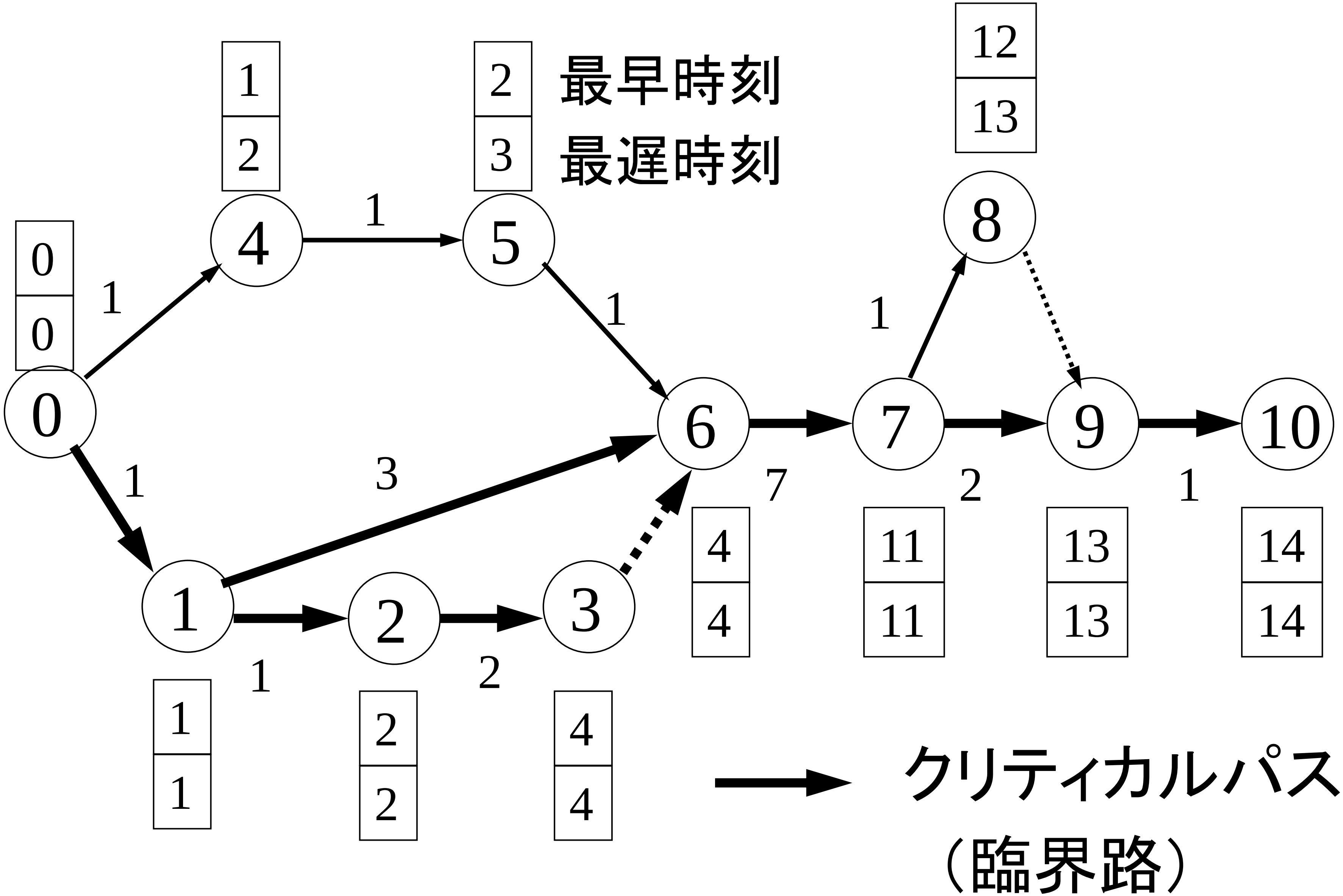
D.G.Malcolm ら

(1950年代後半)

＜プロジェクト・ネットワーク＞



最早時刻＝点0からの最長路の長さ



奈多駅
和白駅
福岡CC
原上
立花口
新宮霊園
雁ノ巣駅
平山
立花山
唐ノ原駅
東区
鹿児島本線
遠見岳
牧ノ鼻
三日月温泉
香椎花園前駅
東区
香椎花園
香住ヶ丘1
猪野
シオヤ鼻
海ノ中道駅
福岡湾
久山町
山陽新幹線
西戸崎シーサイドCC
海の中道海浜公園
マリンワールド海の中道
カメイGC
香椎
城ノ越山
香椎線
猪野川
山の神
香椎参道
久山CC
大岳GC
西戸崎駅
城浜
名香野駅
香椎神宮駅
谷口
池上池
新建川
城山
久山町役場
西戸崎
名島駅
森江山
端島
久大薬用植物園
八田
深井
東区
土井駅
江辻山
蒲田池
極楽池
松島
福岡IC
江辻池
篠栗北
和田橋
都市高速1号線
大隈
粕屋町
多々良川
篠栗駅
福岡湾
篠栗町役場
伊賀駅
長者原
門松
尾仲
馬手池
東区役所
篠栗線
乙犬
西浦池
柚須駅
原町駅
博多港
須恵川
粕屋町役場
切通池
若杉
乙犬山
福岡県庁
妙見
柿元池
鵜来島
博多港フェリーのりば
別府
大谷池
福岡市
酒殿駅
植木
須恵
岳城山
姪浜港フェリーのりば
須崎公園
福岡空港
須恵駅
西公園
都市高速道路
榎田
須恵PA
中央区
青木
志免町役場
上須恵
室見川
天神
博多区役所
博多区
大的
須恵中央駅
福岡タワー
樋井川
中央区役所
須恵町役場
福岡市役所
博多駅
東平尾公園
大濠公園
早良区役所
樋井川
博多の森陸上競技場
須恵町
九州自動車道
美術館
脇山口
比恵
宇美川
新原
西区役所
早良口
鹿原山
薬院駅
新原駅
城南区役所
南公園
月隈
香椎線
姪浜町

カーナビゲーション

自分の行きたい場所を入力すると、最も良い道順を表示してくれる

↓

出発地から目的地までの最短経路探索

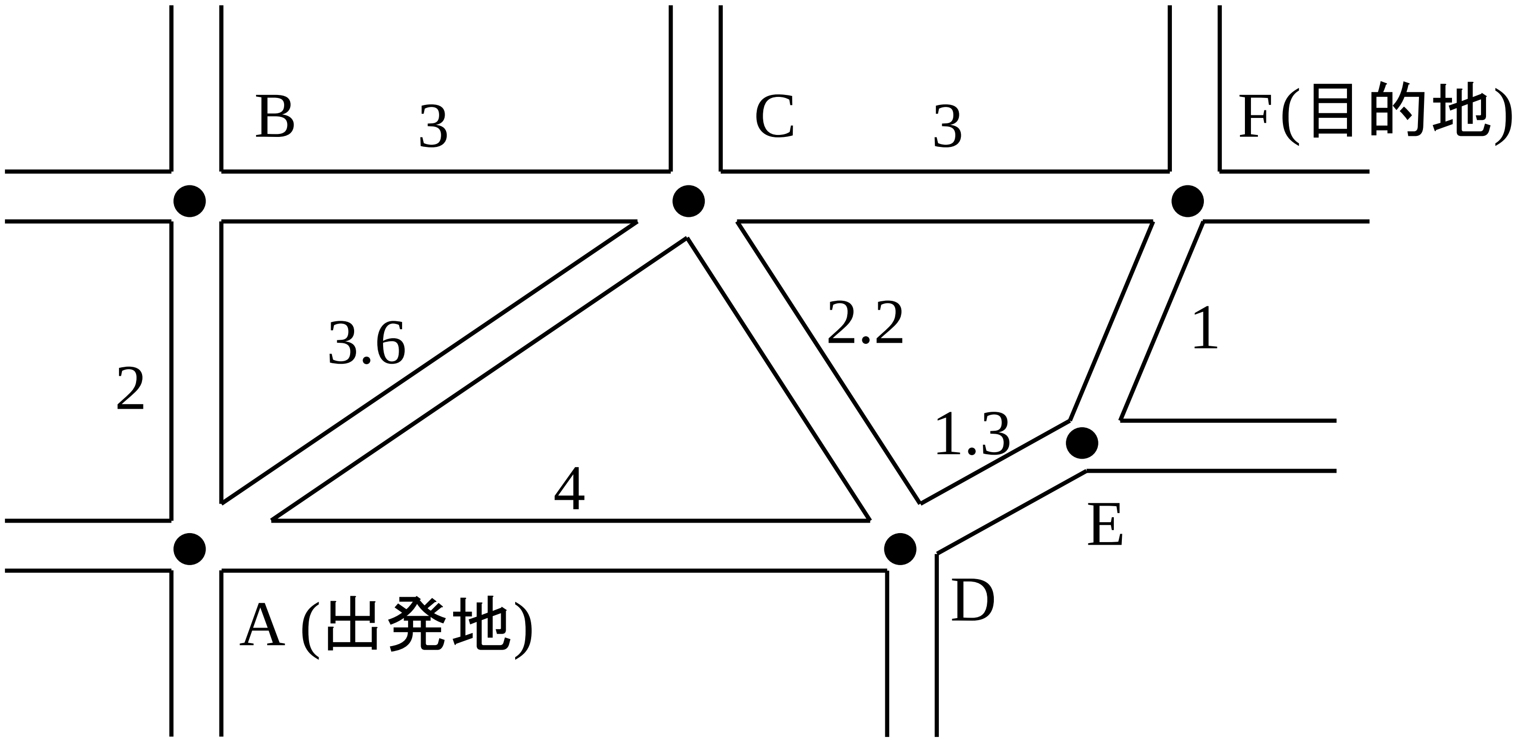
＜良いアルゴリズムの条件＞

・正しく問題を解決する

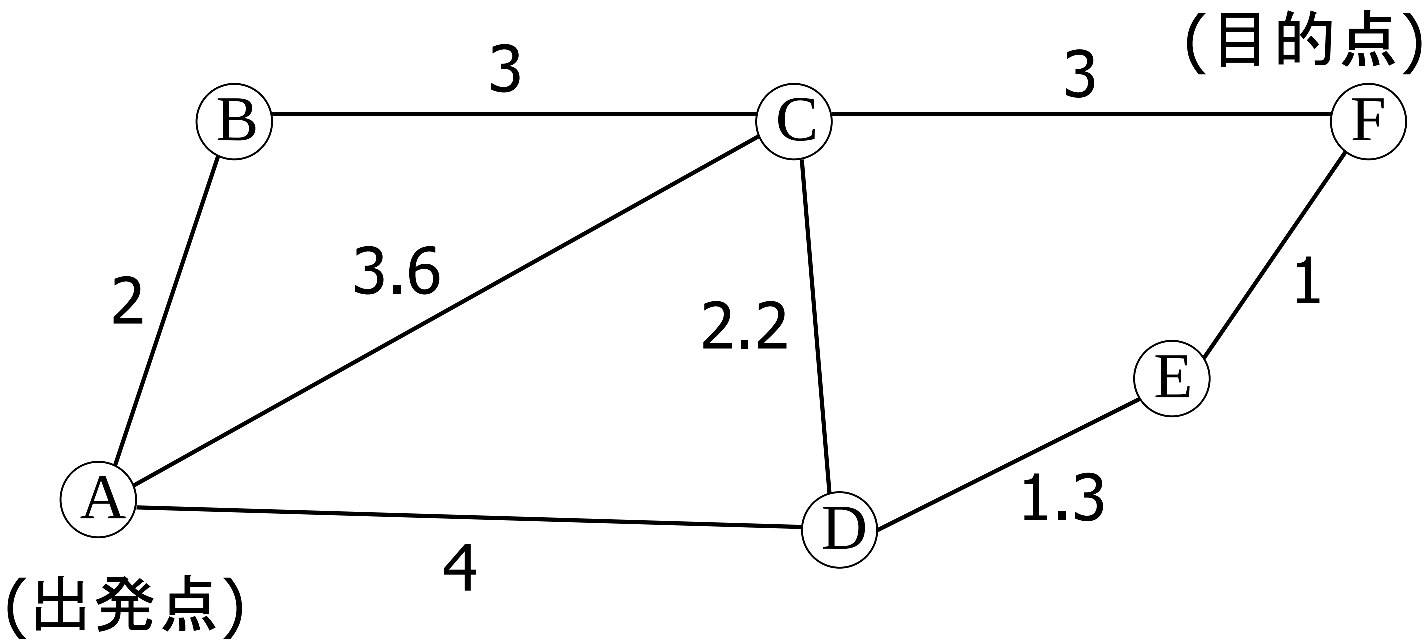
➡ 正当性

・速く問題を解決する

➡ 効率性



経路探索の問題図



地図のグラフ化

地図全体の情報

↓

道路に関する情報

↓

グラフ化

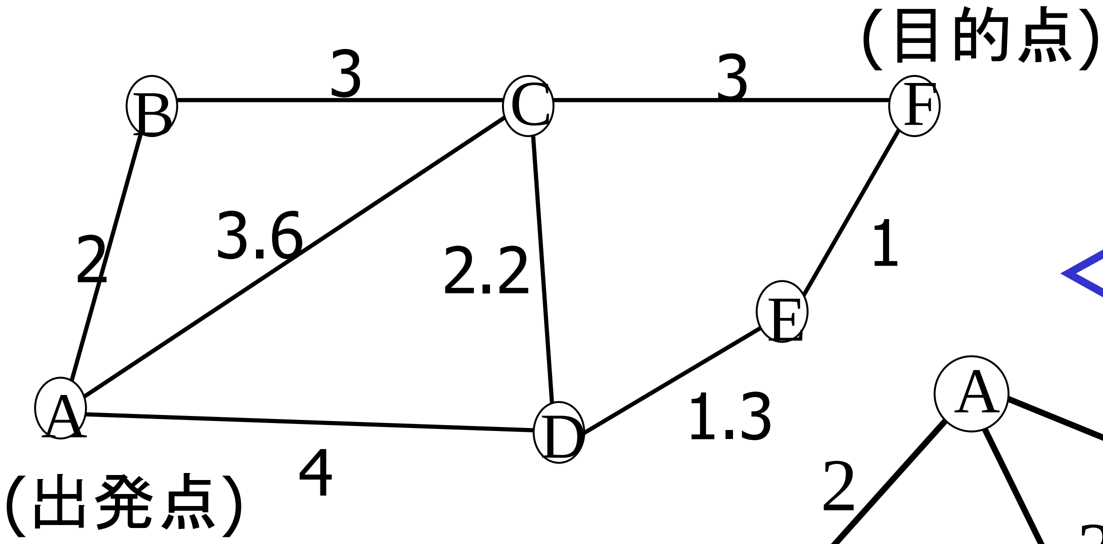
解決するのに適した形で
問題を表現する

⇒ モデル化

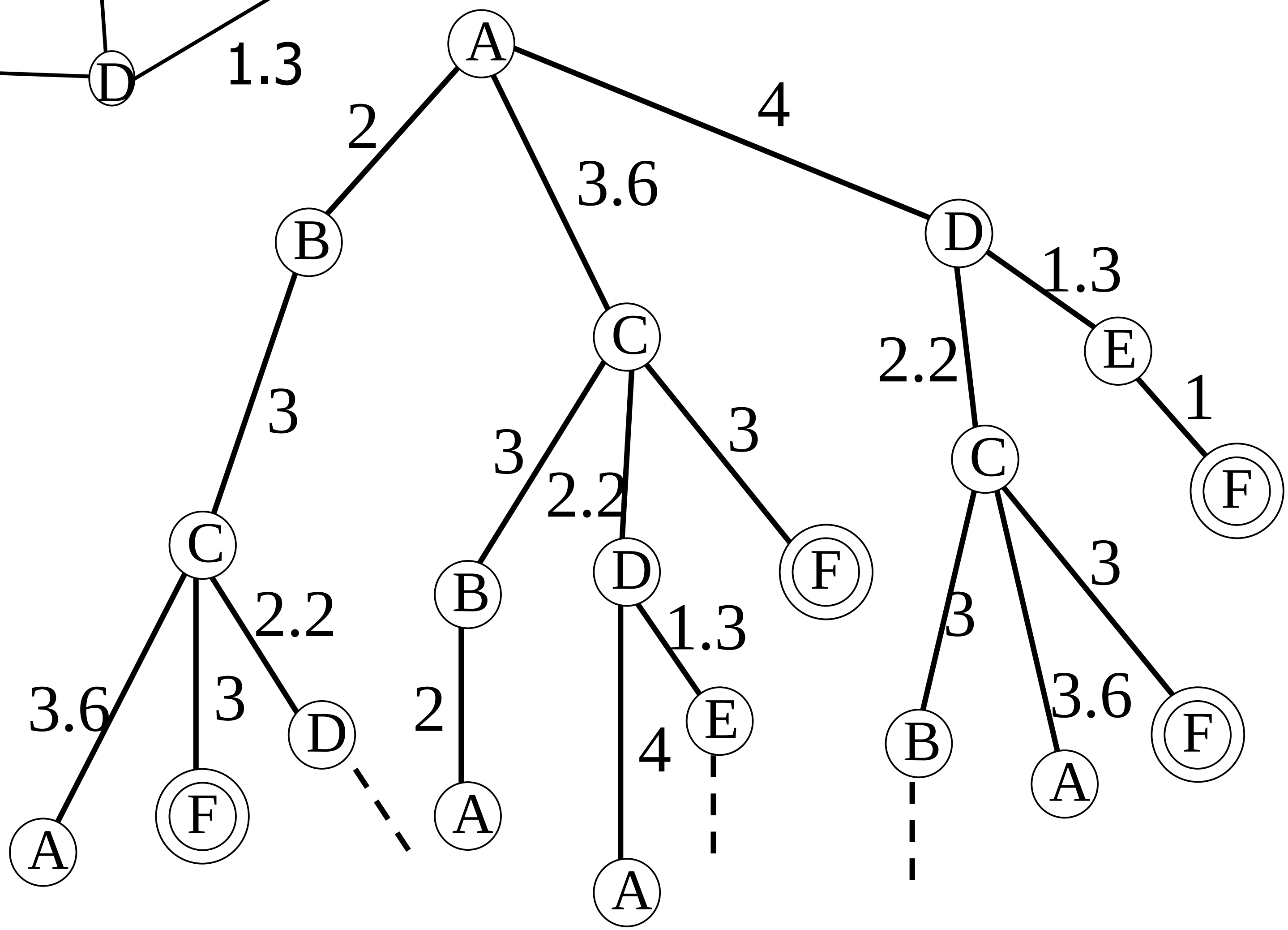
出発地から目的地まで最も早く到着する経路を求めるには？

↓

出発点Aから目的点Fまでのすべての経路を調べて、最も短い経路を求めれば良い。



＜経路探索木＞

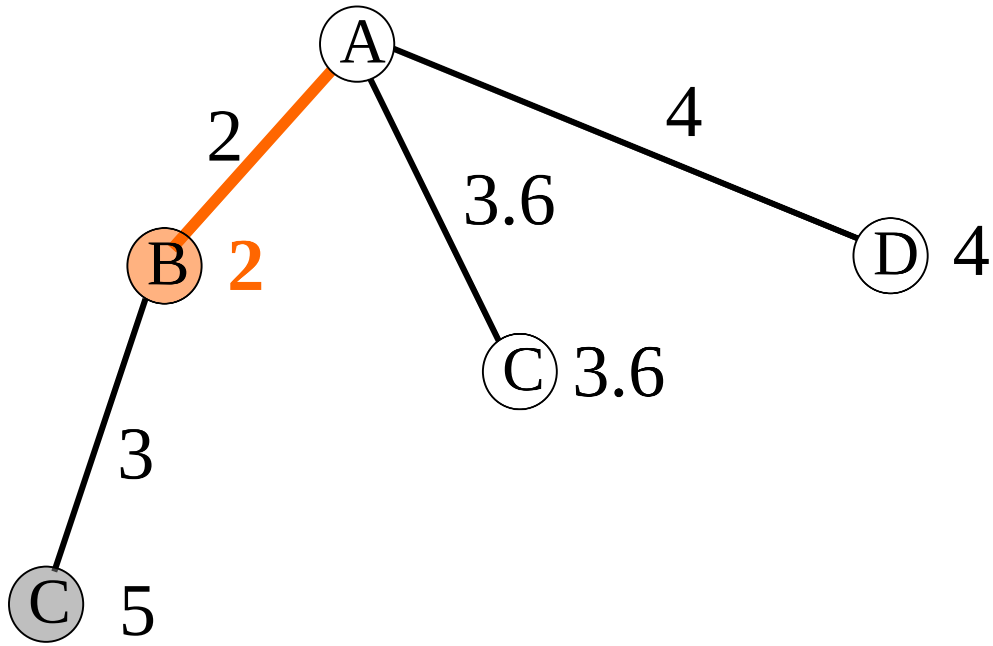


すべての経路を調べれば、たしかに最短経路が求まる

しかし問題が大きくなると、計算時間がかかりすぎる。

↓

もっとうまい方法はないか？



経路ABは明らかに出発点Aから点Bへの最短経路

出発点からの経路が最も短い点を展開する

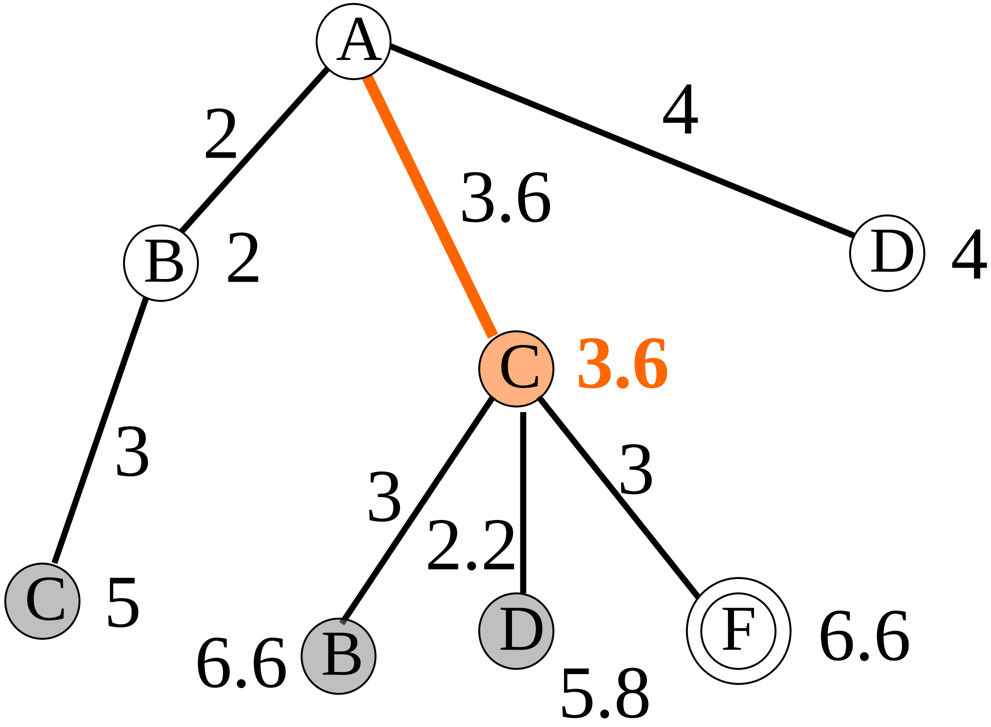
→ 最良優先探索

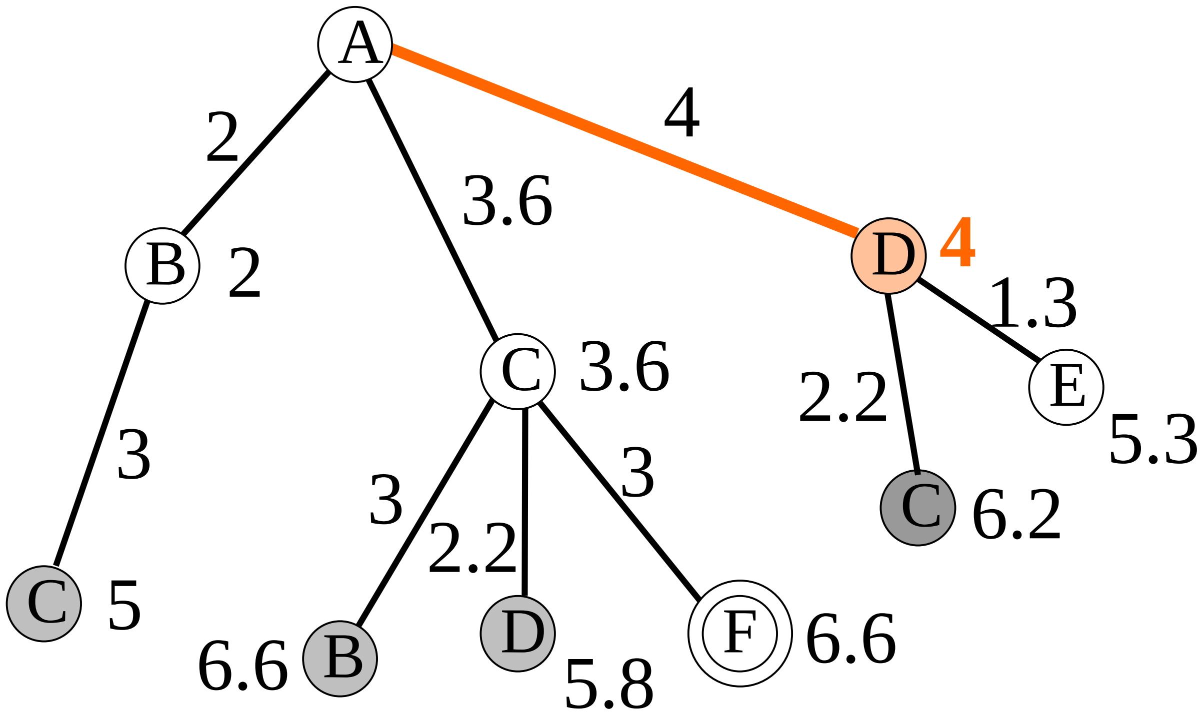
より短い経路が得られている点は展開しない

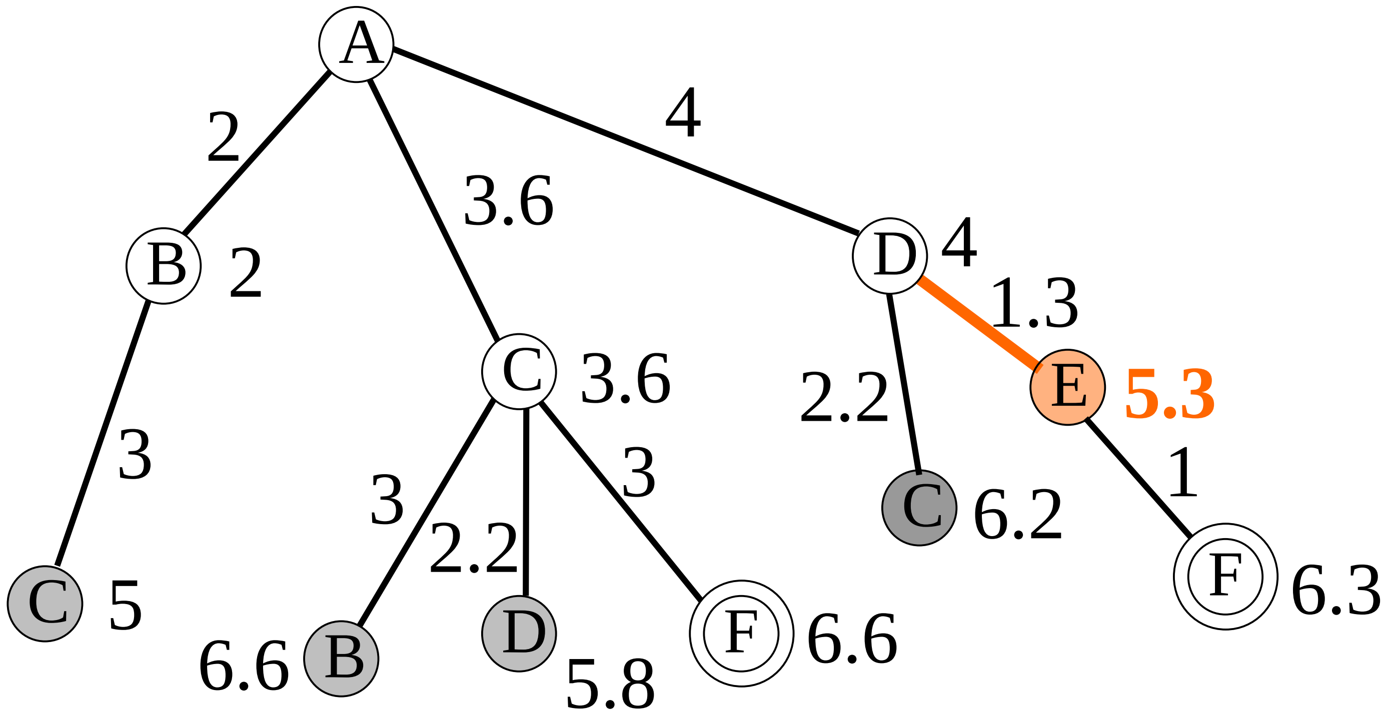
↓

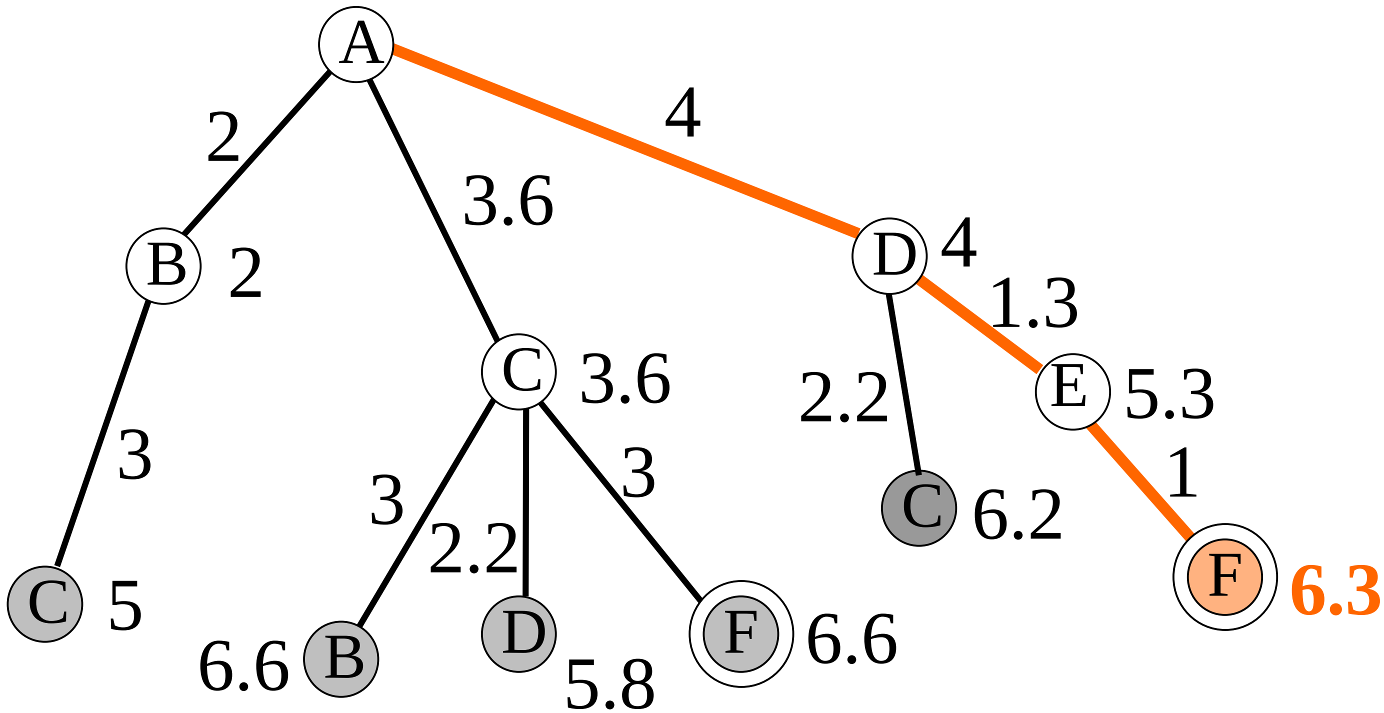
出発点から近い順に、各点の最短経路が求まる

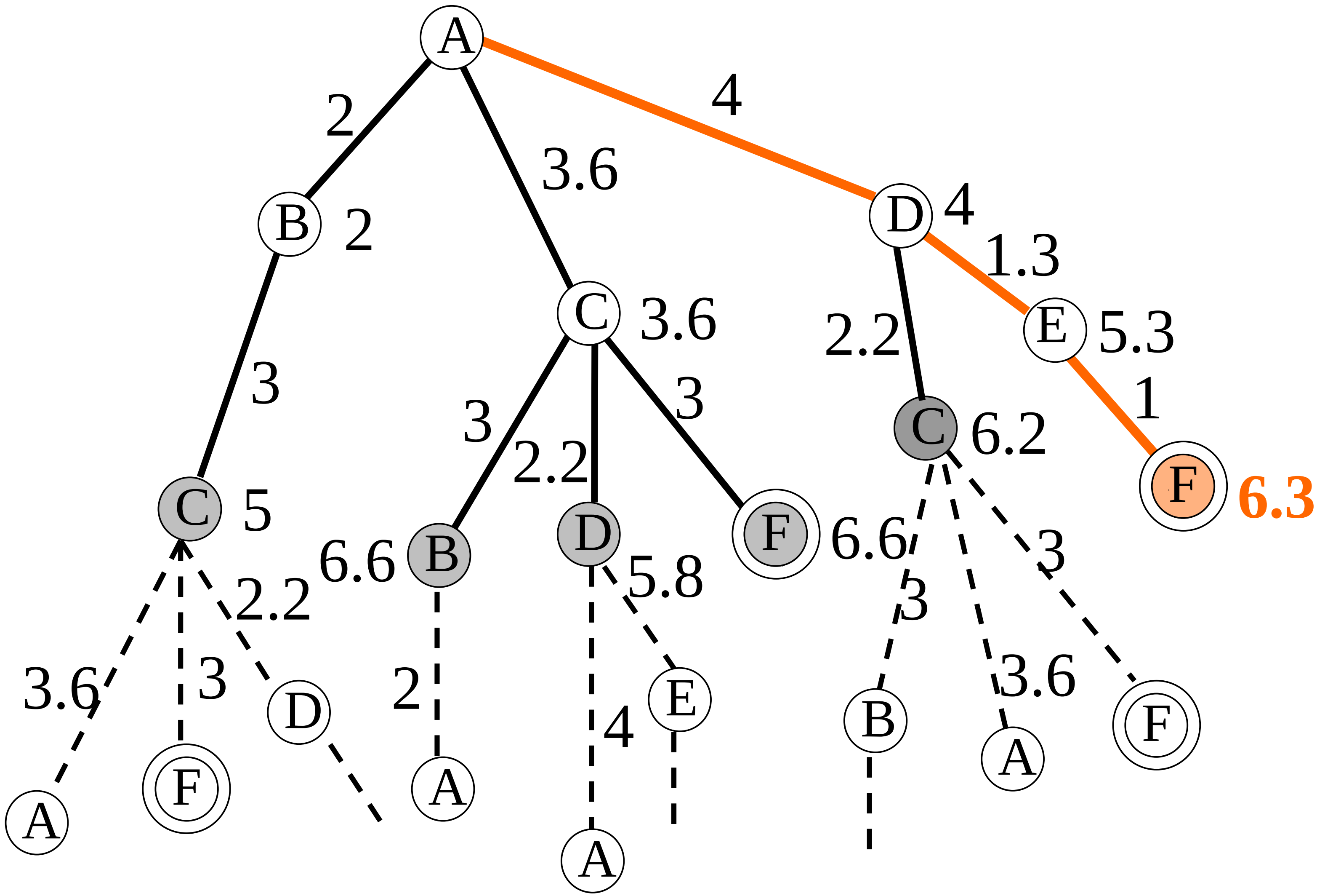
→ ダイクストラ法


A
2
3.6
4
B
2
D
4
C
3.6
3
3
3
2.2
C
5
6.6
B
D
5.8
F
6.6

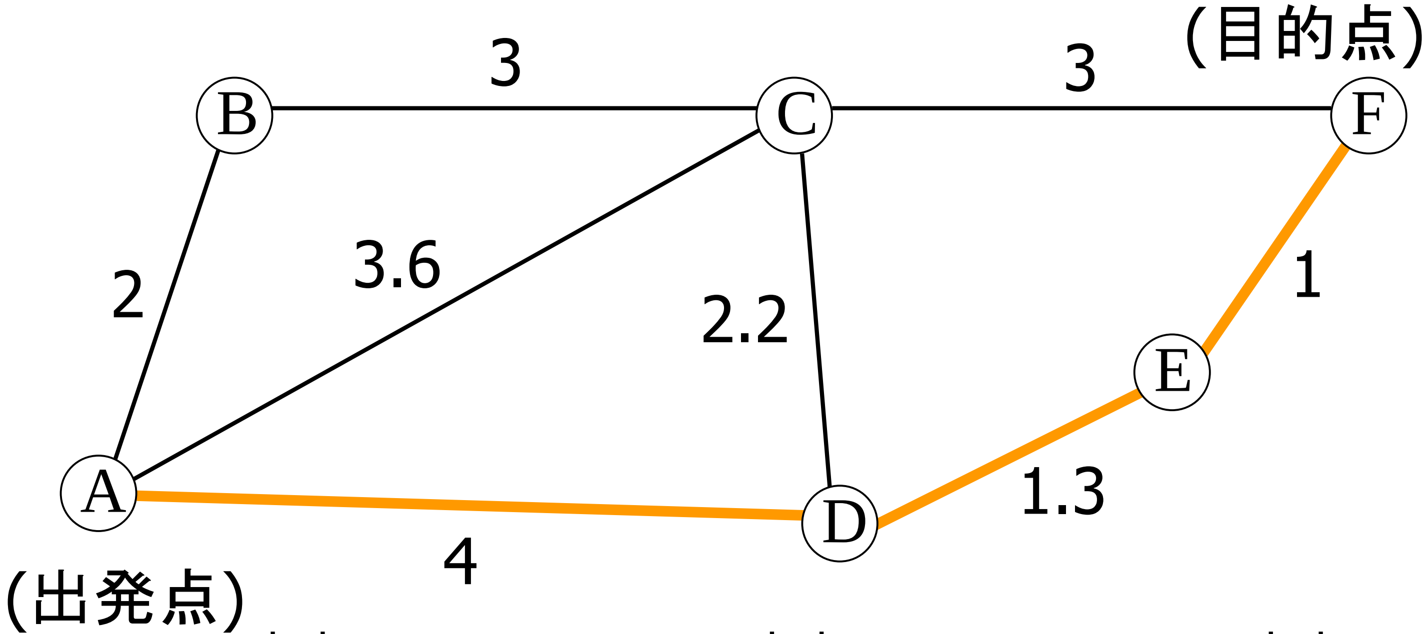

A
2
3.6
4
B
2
C
3.6
D
4
1.3
2.2
3
3
2.2
3
E
5.3
C
6.2
C
5
B
6.6
D
5.8
F
6.6

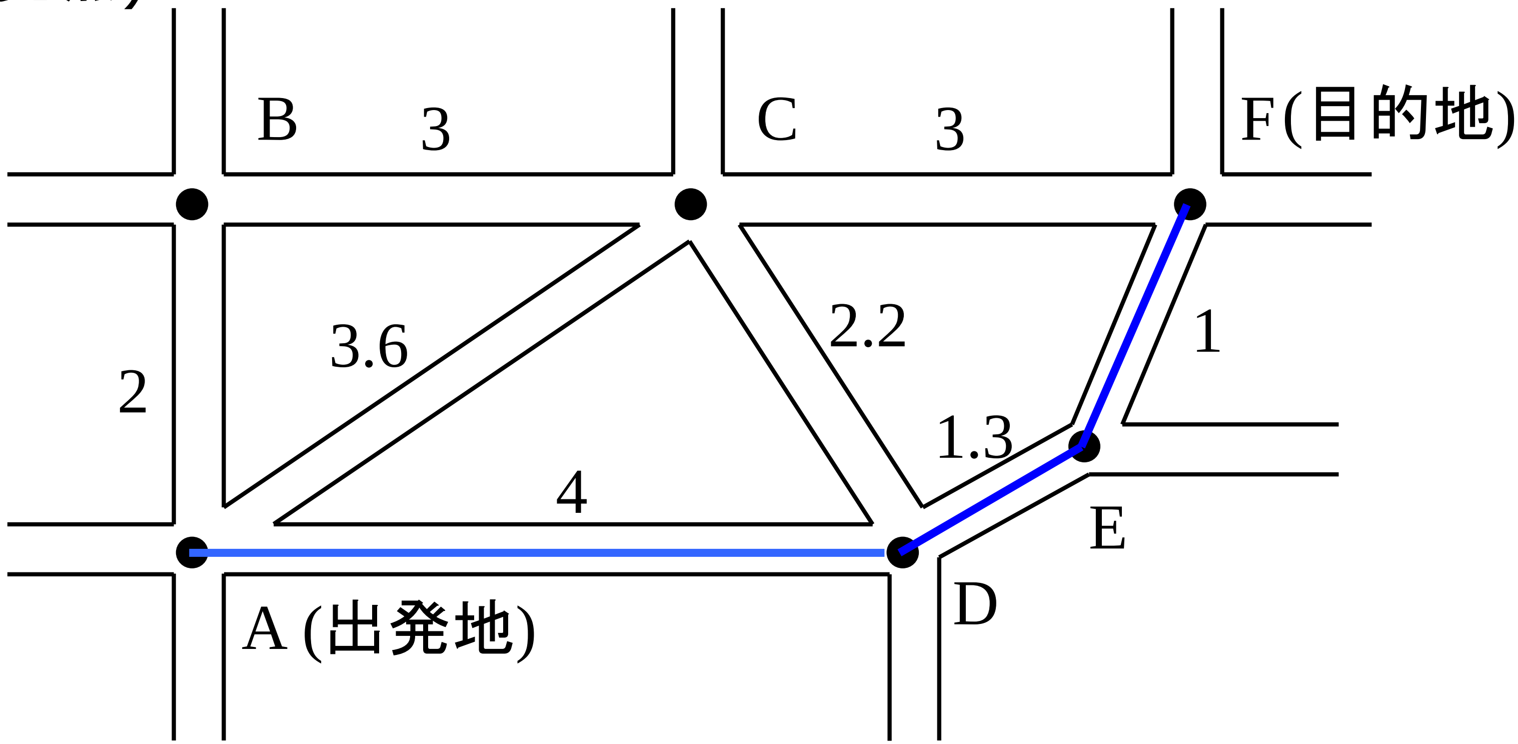

A
2
3.6
4
B
2
C
3.6
D
4
1.3
2.2
E
5.3
3
3
2.2
3
1
C
5
B
6.6
D
5.8
F
6.6
C
6.2
F
6.3


A
2
4
3.6
B
2
D
4
1.3
C
3.6
2.2
E
5.3
3
3
3
1
C
6.2
2.2
C
5
F
6.3
6.6
B
D
F
6.6
5.8



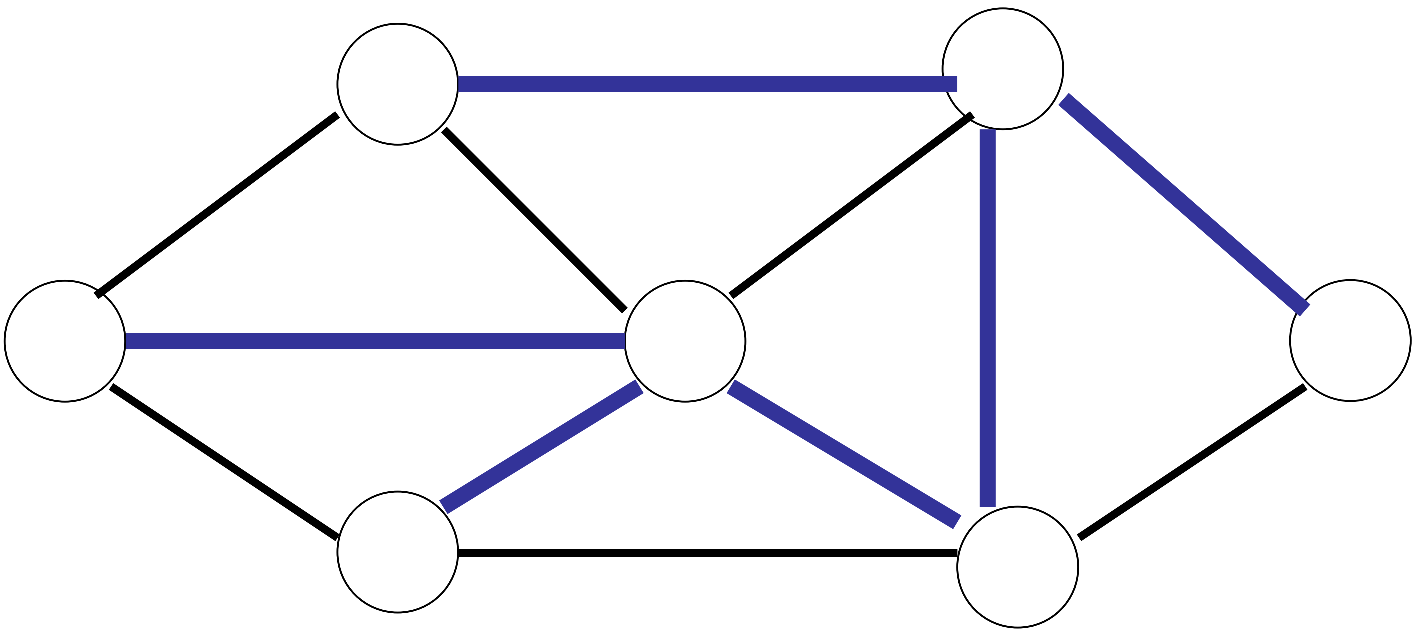
A
2
3.6
4
B
2
D
4
1.3
C
3.6
2.2
E
5.3
3
3
3
1
C
6.2
F
6.3
C
5
2.2
6.6
B
D
5.8
F
6.6
3
3
3.6
3
2
4
3.6
A
F
D
A
E
A
B
A
F


(目的点)
B
3
C
3
F
2
3.6
2.2
1
E
A
1.3
D
4
(出発点)


B
3
C
3
F(目的地)
2
3.6
2.2
1
1.3
4
E
D
A (出発地)

最小木問題

木：閉路を含まない連結グラフ



最小木：長さ最小の全域木

a_i：枝e_iの長さ

＜クラスカル法＞　J.B.Kruskal (1956)

(0) グラフGの枝を短い順に並べ、$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_m$を満たすように枝$e_i$の番号（添字）を付けかえる.　T:＝{$e_1$}, k :＝2 とおく.

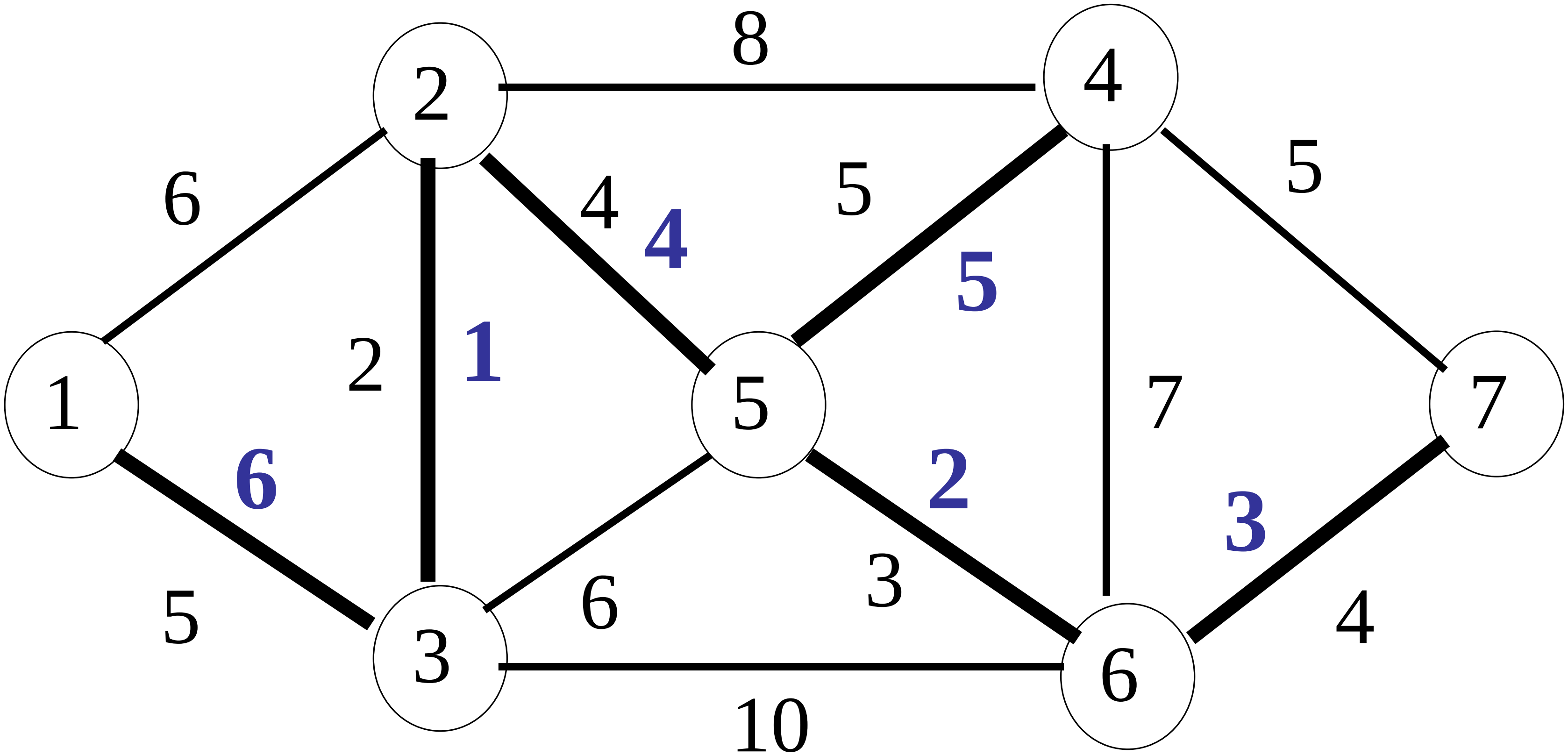
(1) 枝集合T∪{e_k}が閉路を含まないならば、T:＝T∪{e_k} とする.

(2) TがGの全域木になっていれば計算終了

・　さもなければ k :＝k+1 としてステップ(1)へ

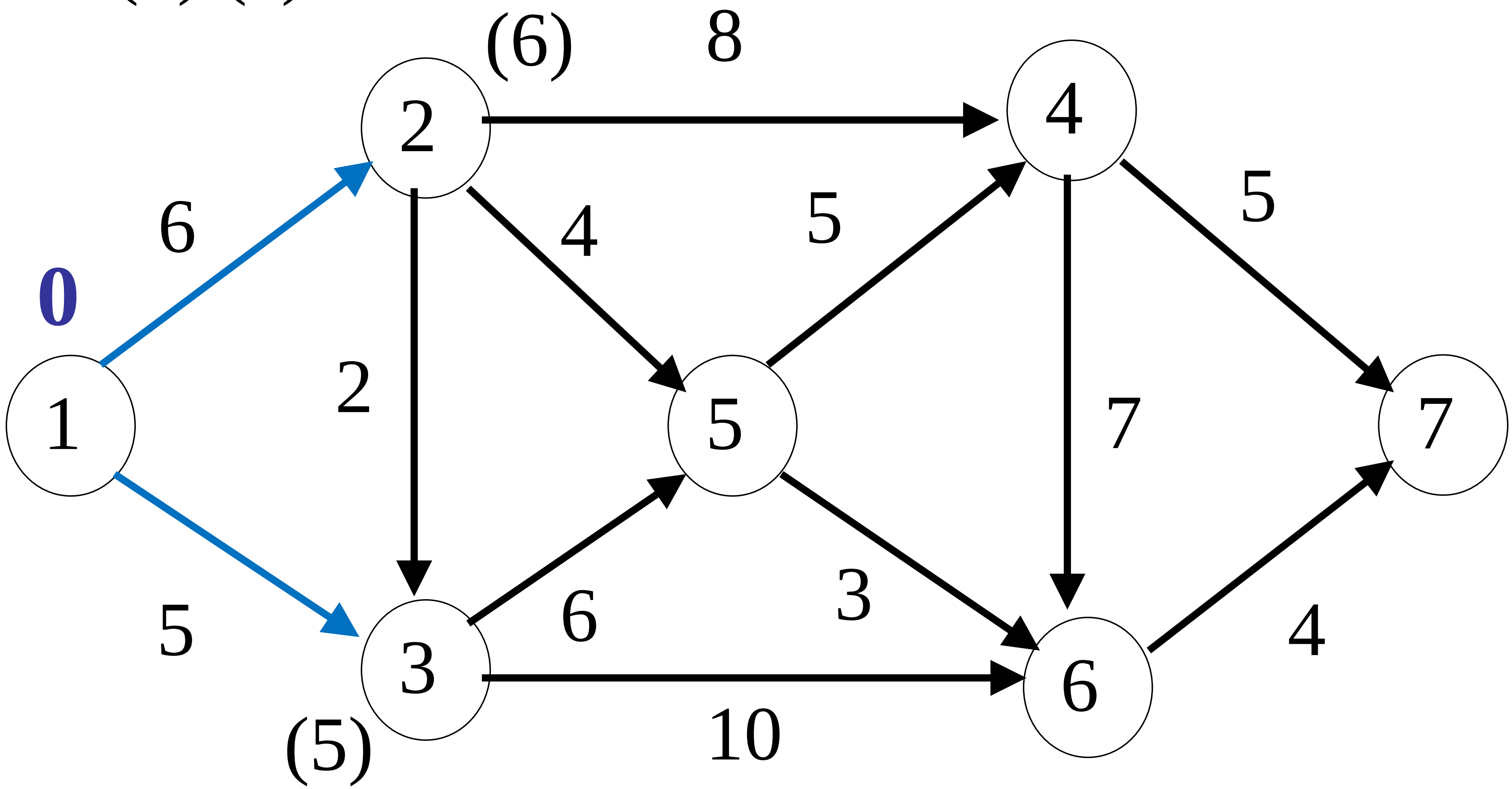
・欲張り法（Greedy Algorithm）

1. (1) 最小木

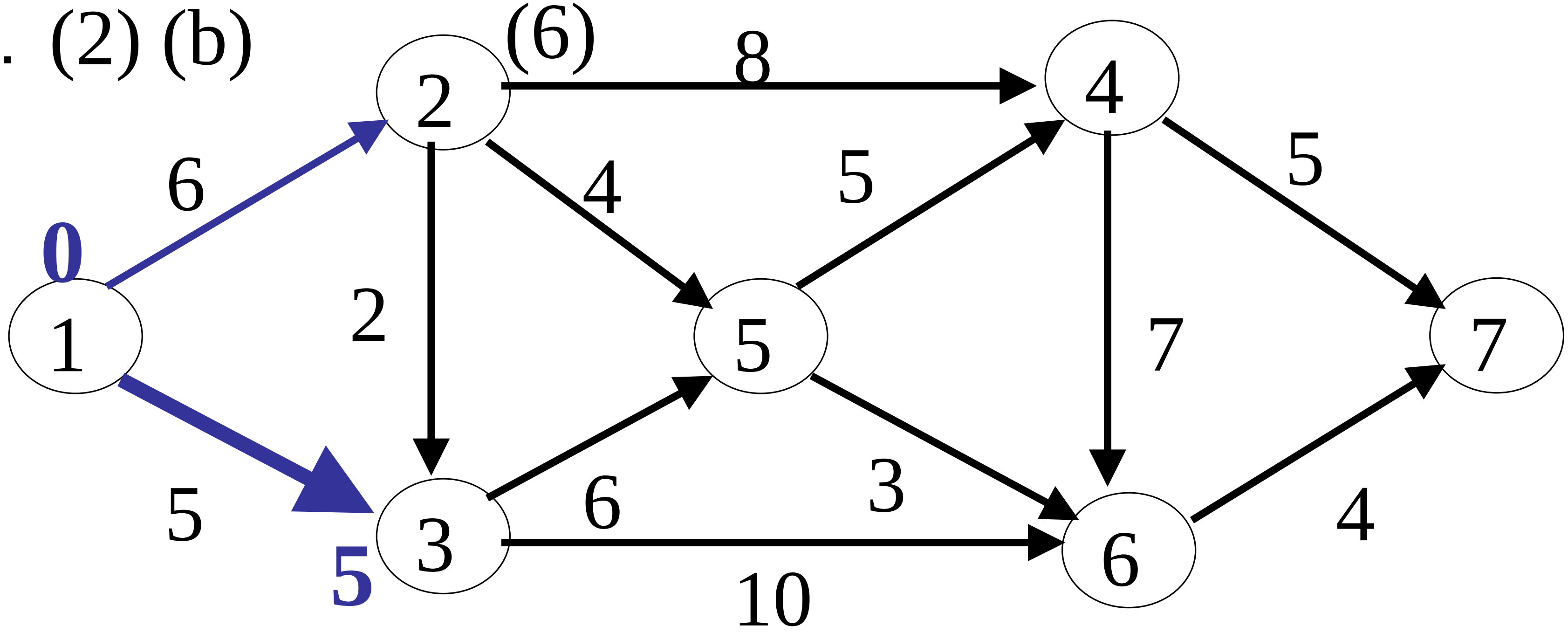


1. (2) 最短路

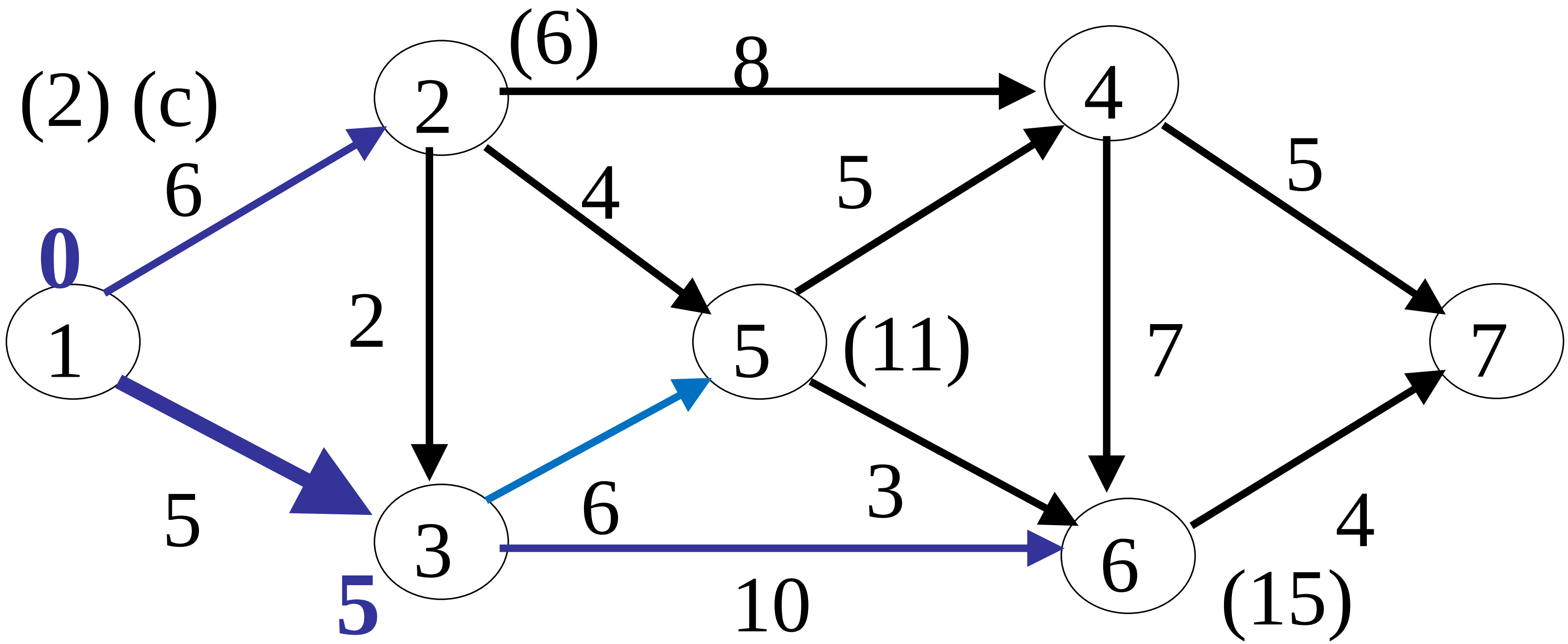
1. (2) (a)



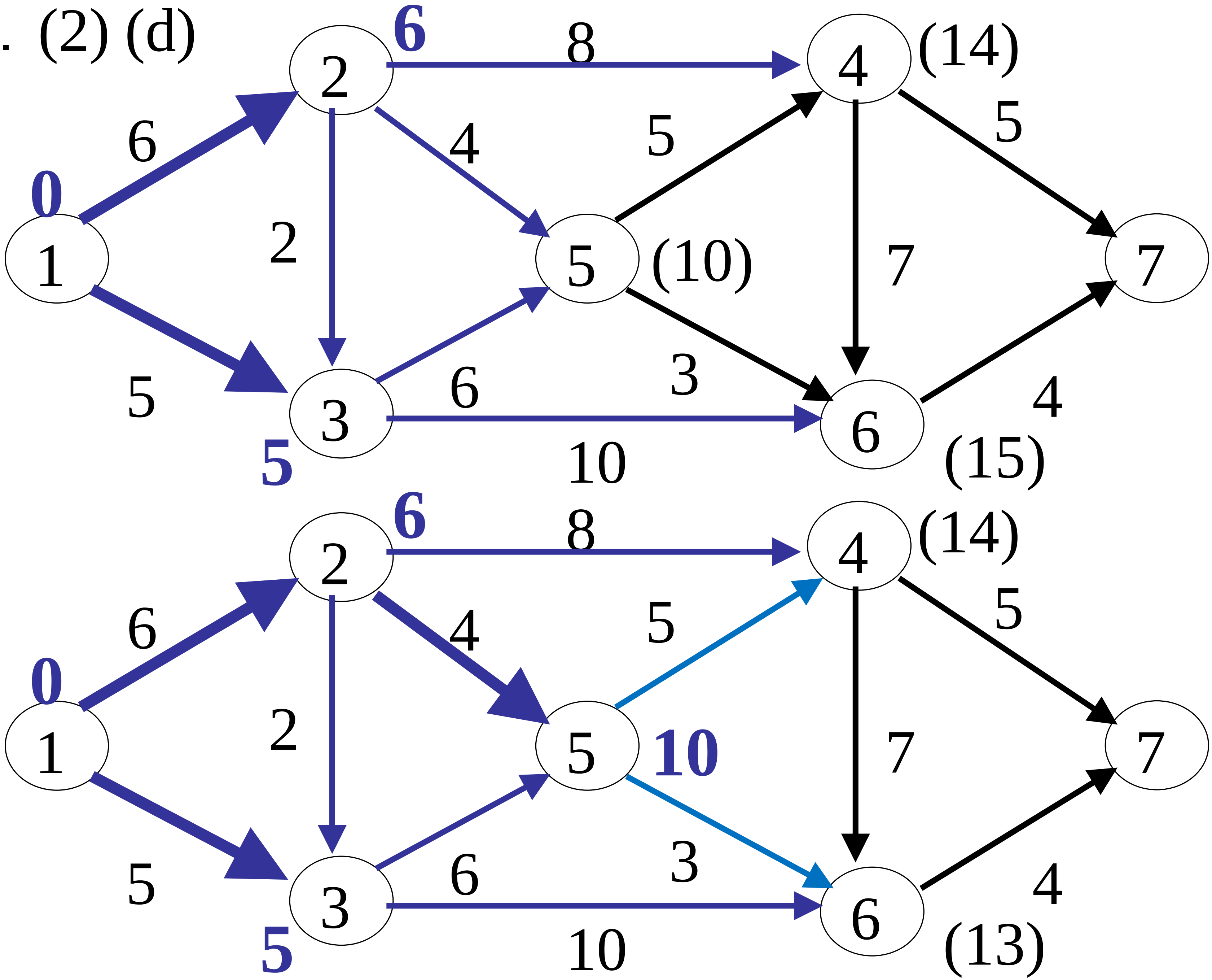
1. (2) (b)

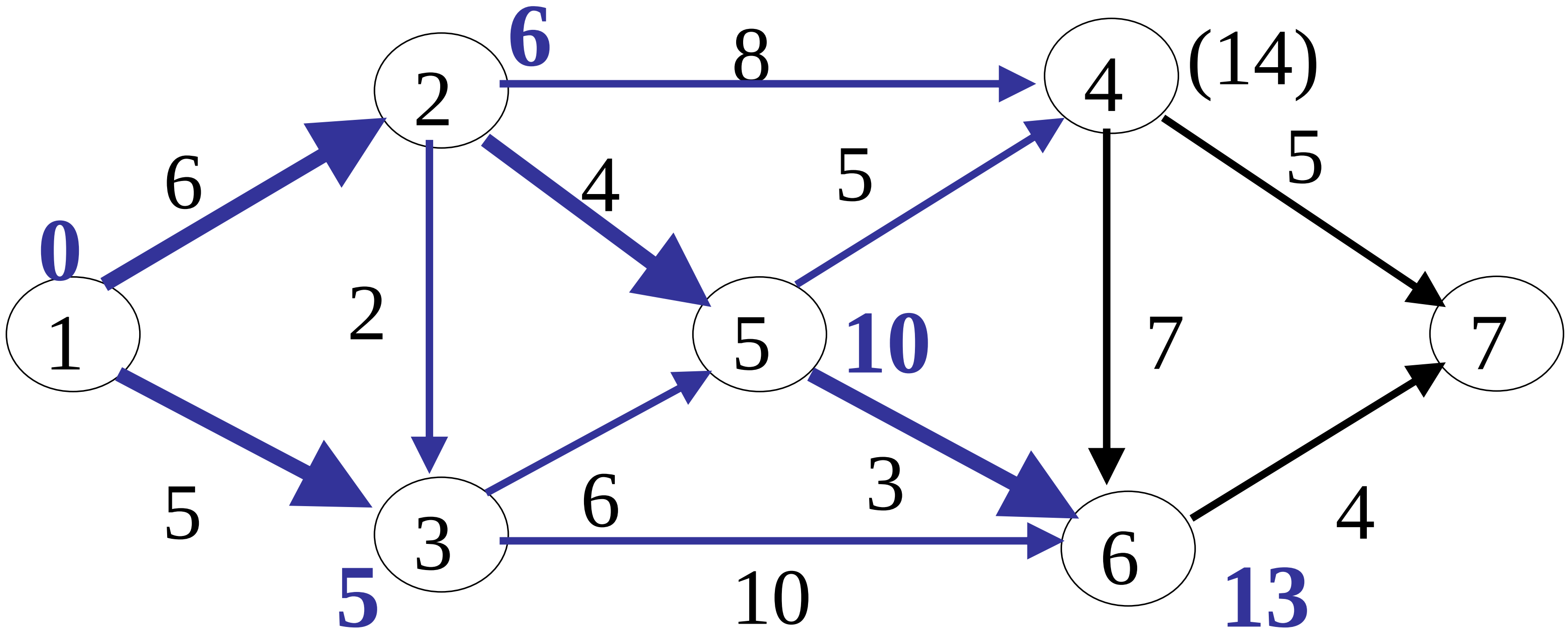

(6)
8
2
4
6
0
1
2
4
5
5
5
7
7
5
3
6
3
5
3
4
6
10

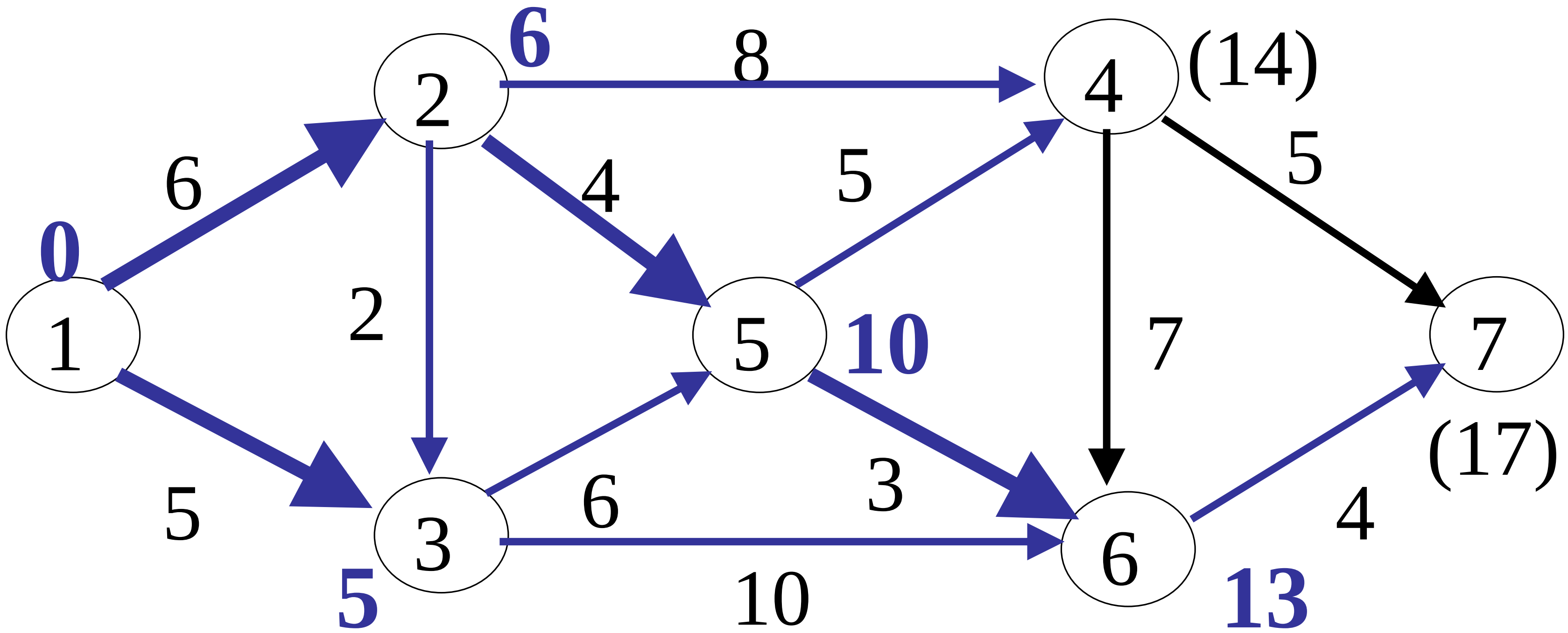
1. (2) (c)

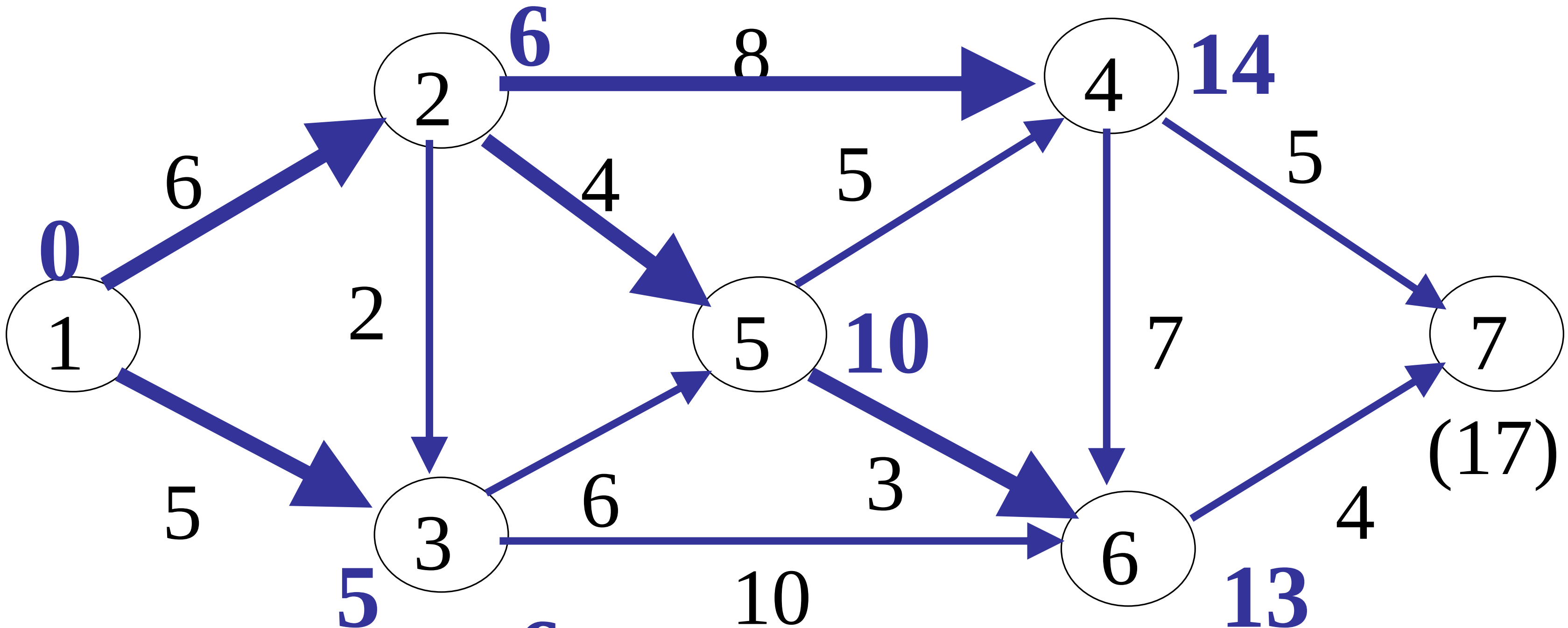

(6)
8
2
4
6
0
1
2
4
5
5
(11)
5
7
7
5
3
6
3
5
6
4
(15)
10

1. (2) (d)

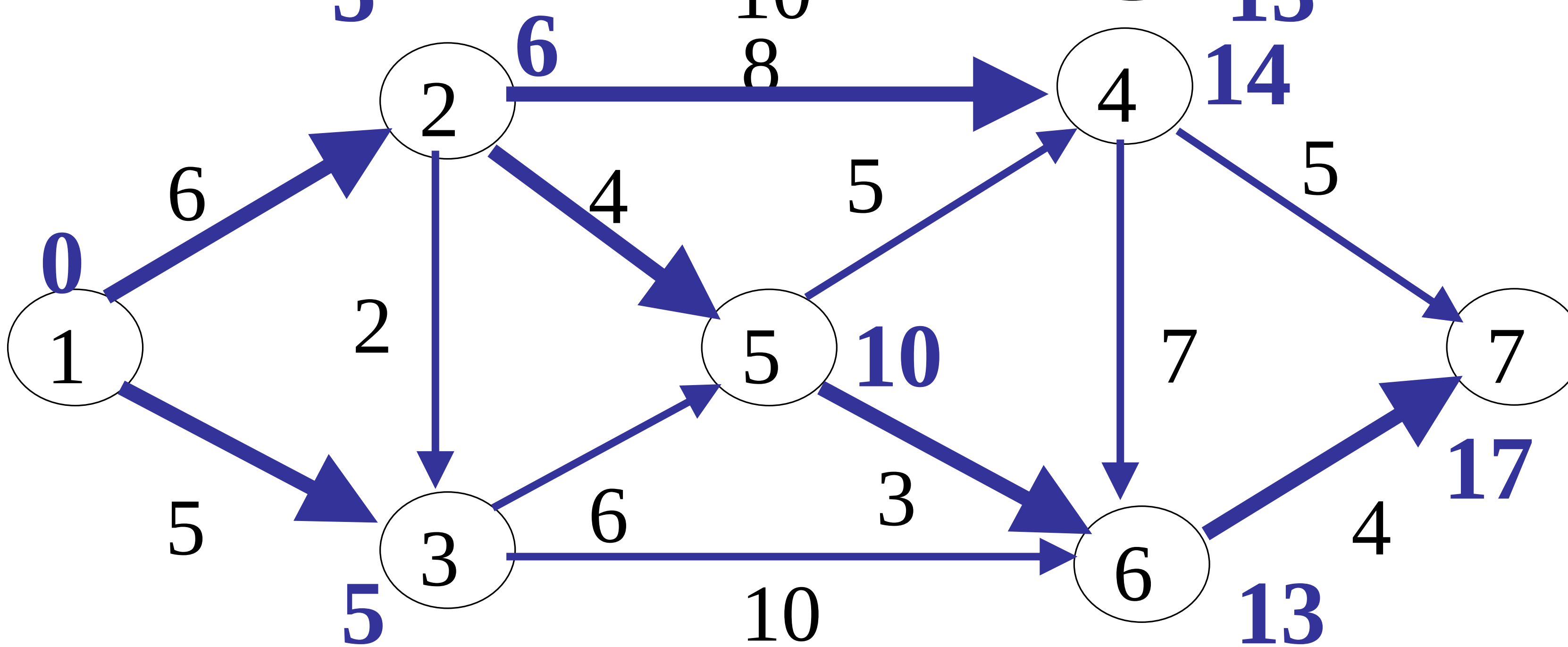



6
0
5
10
13
(14)
1
2
3
4
5
6
7
6
5
8
2
4
5
6
10
3
7
5
4


6
0
5
10
13
(14)
(17)
1
2
3
4
5
6
7
6
5
8
2
4
5
6
10
3
7
5
4

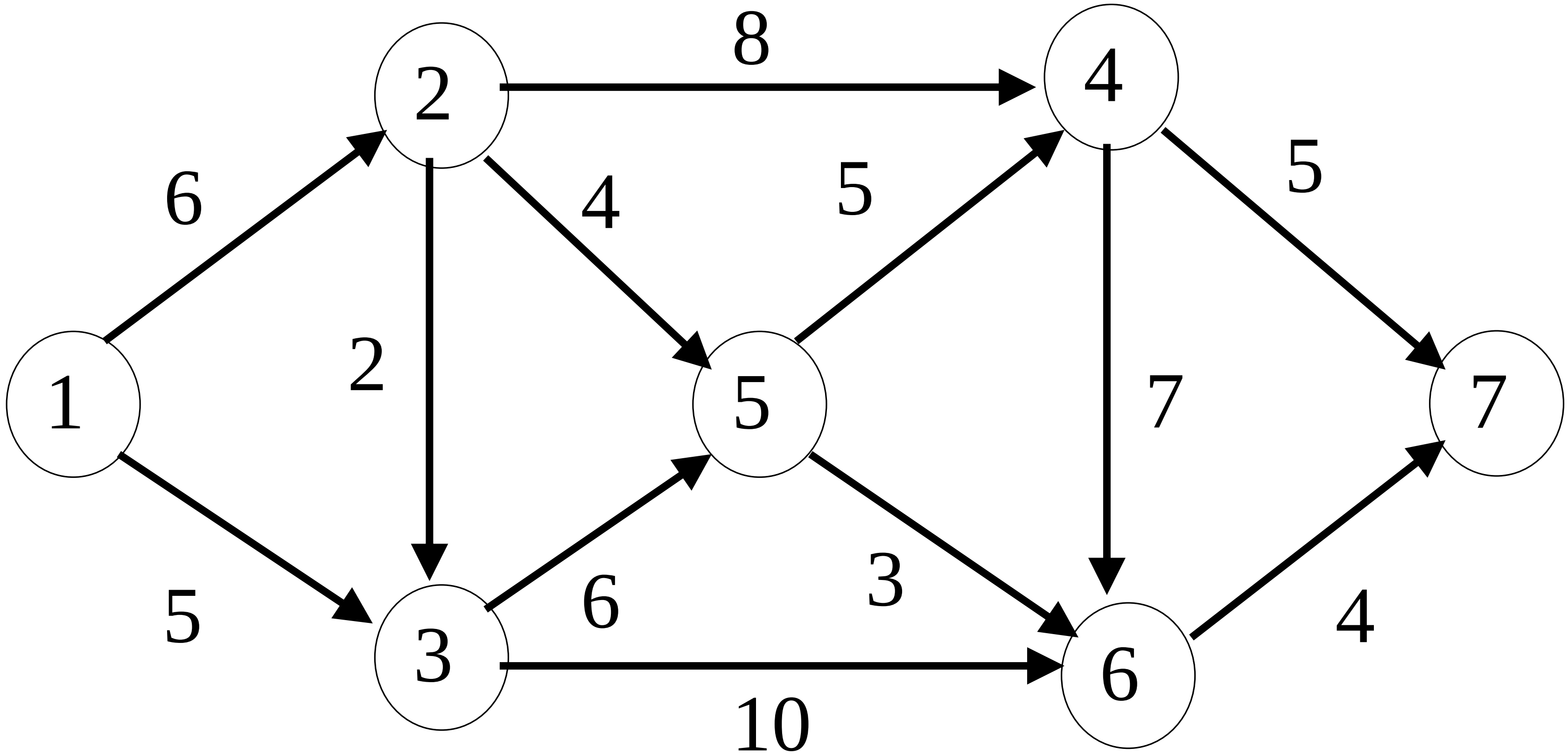


1
2
3
4
5
6
7
0
6
5
14
10
13
(17)
6
5
2
8
4
5
6
3
10
7
5
4

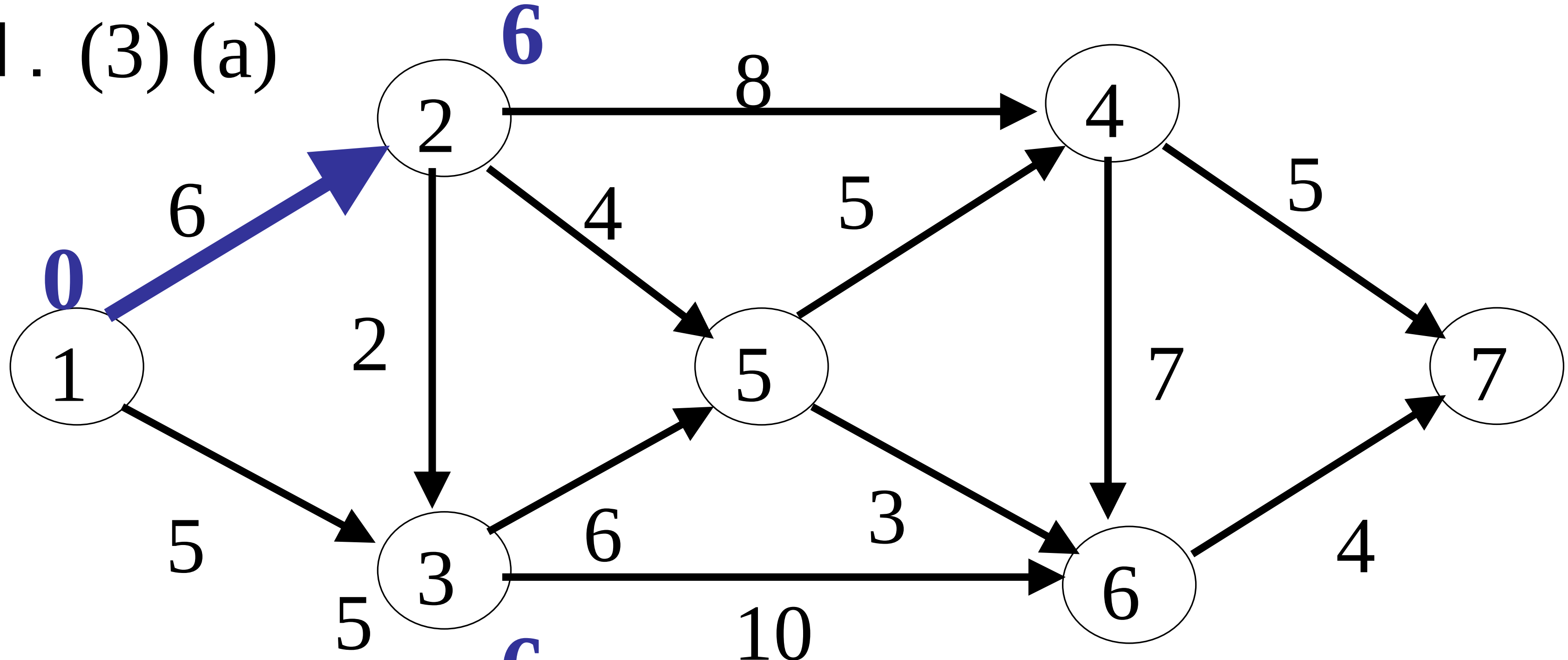


1
2
3
4
5
6
7
0
6
5
14
10
13
17
6
5
2
8
4
5
6
3
10
7
5
4

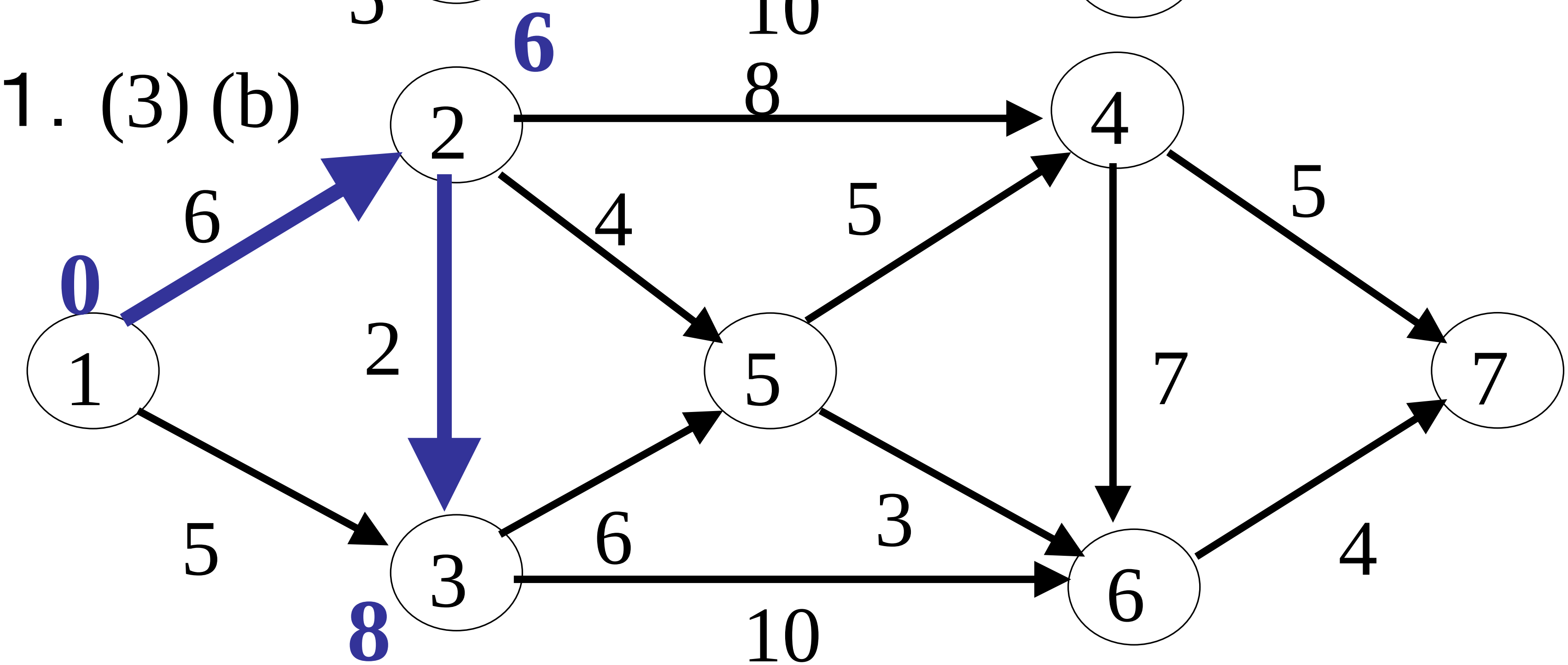
1. (3) 最長路



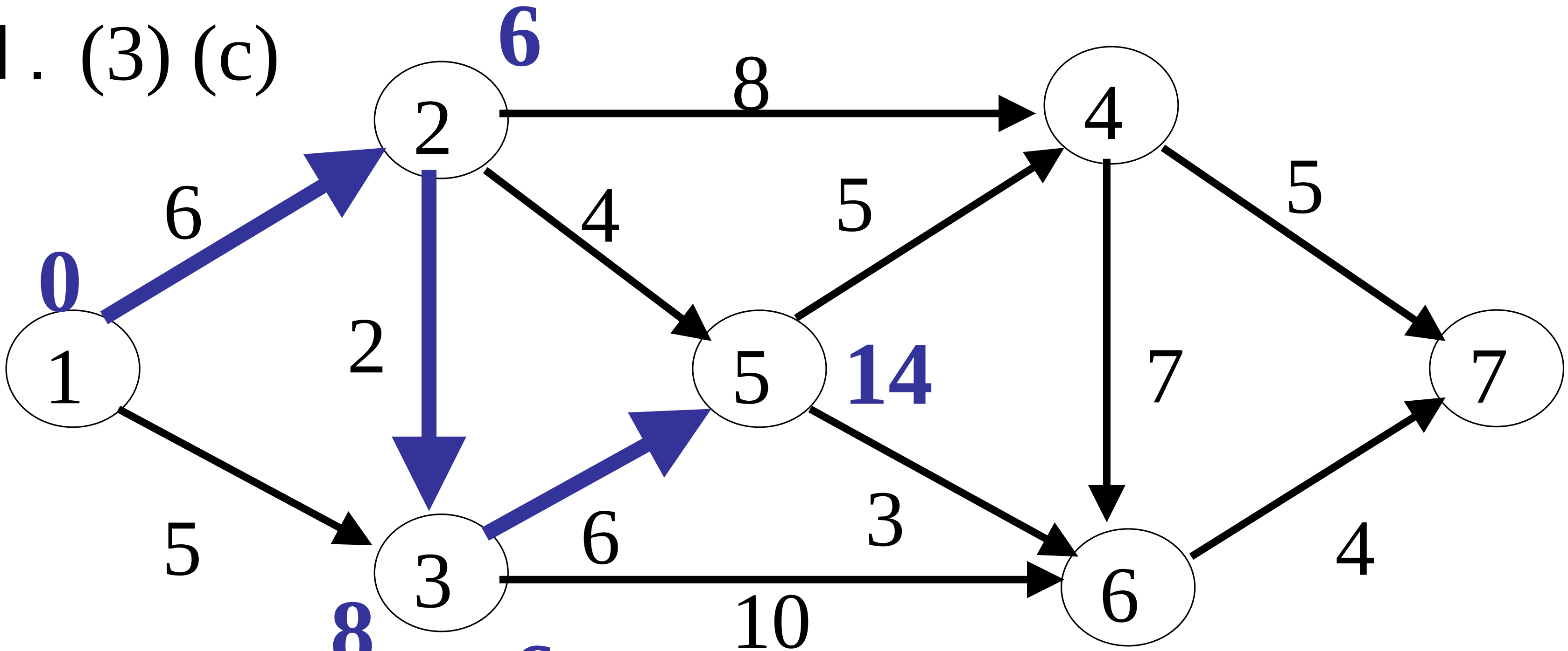
1. (3) (a)



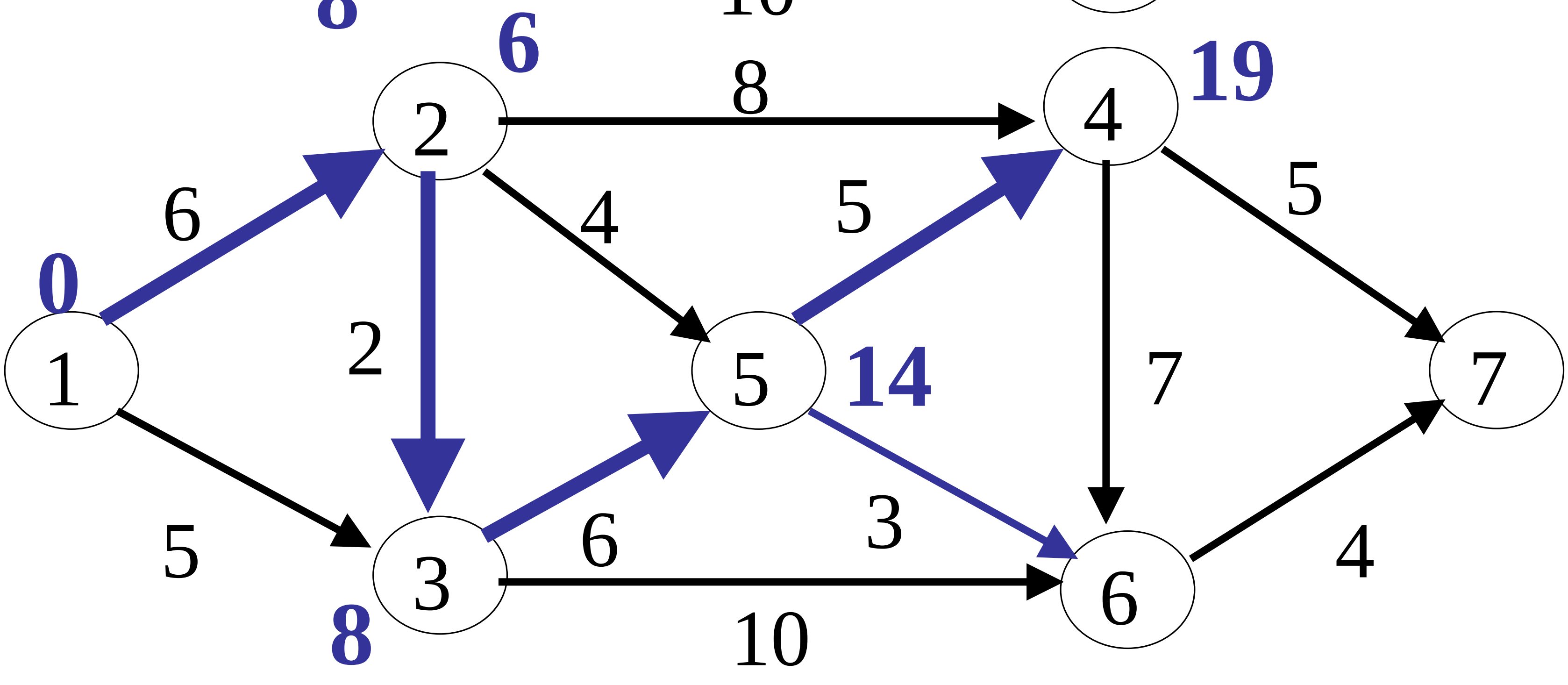
1. (3) (b)



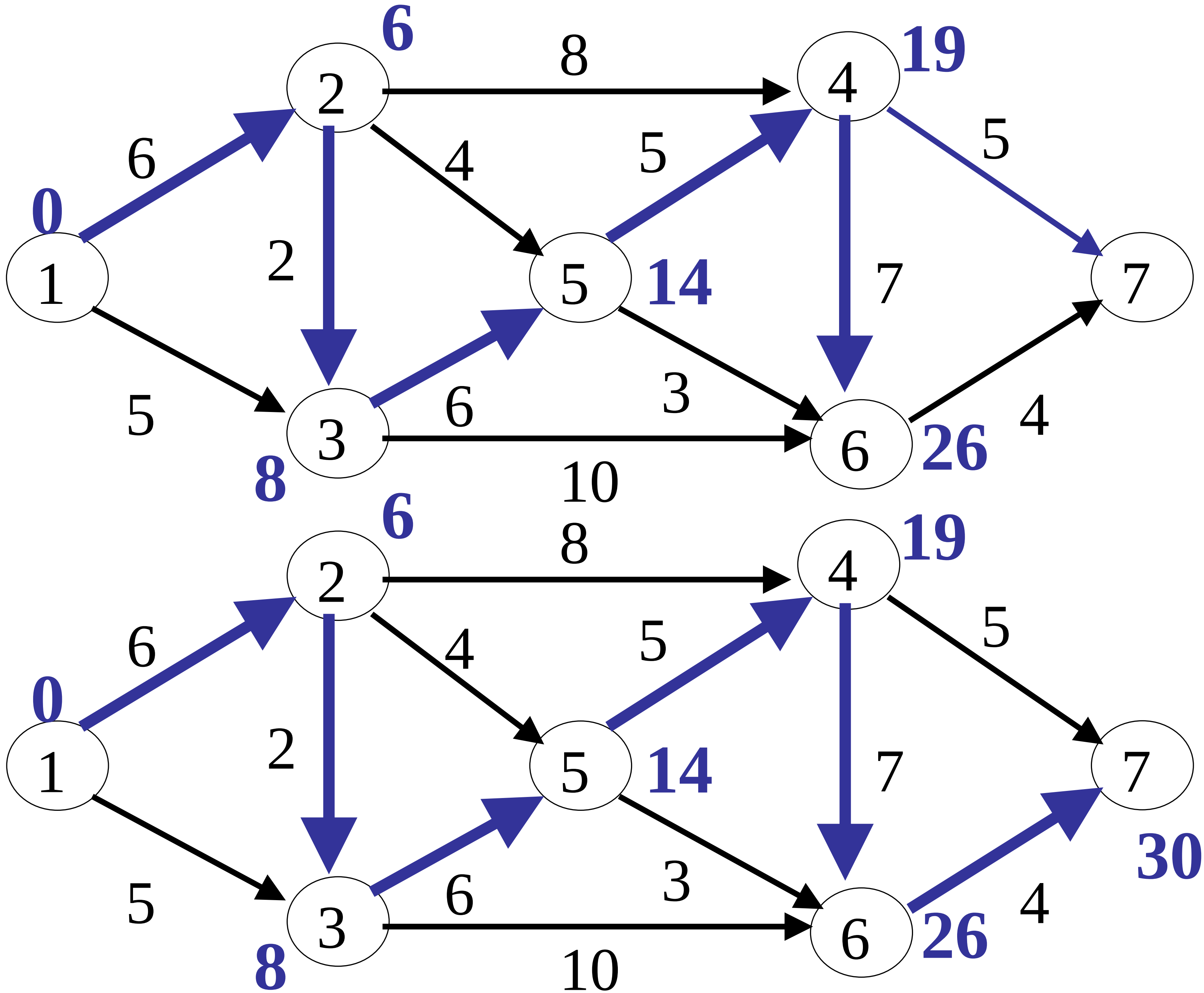
1. (3) (c)



6
8
0
6
14
2
4
5
5
1
2
5
7
7
5
6
3
6
3
4
8
10

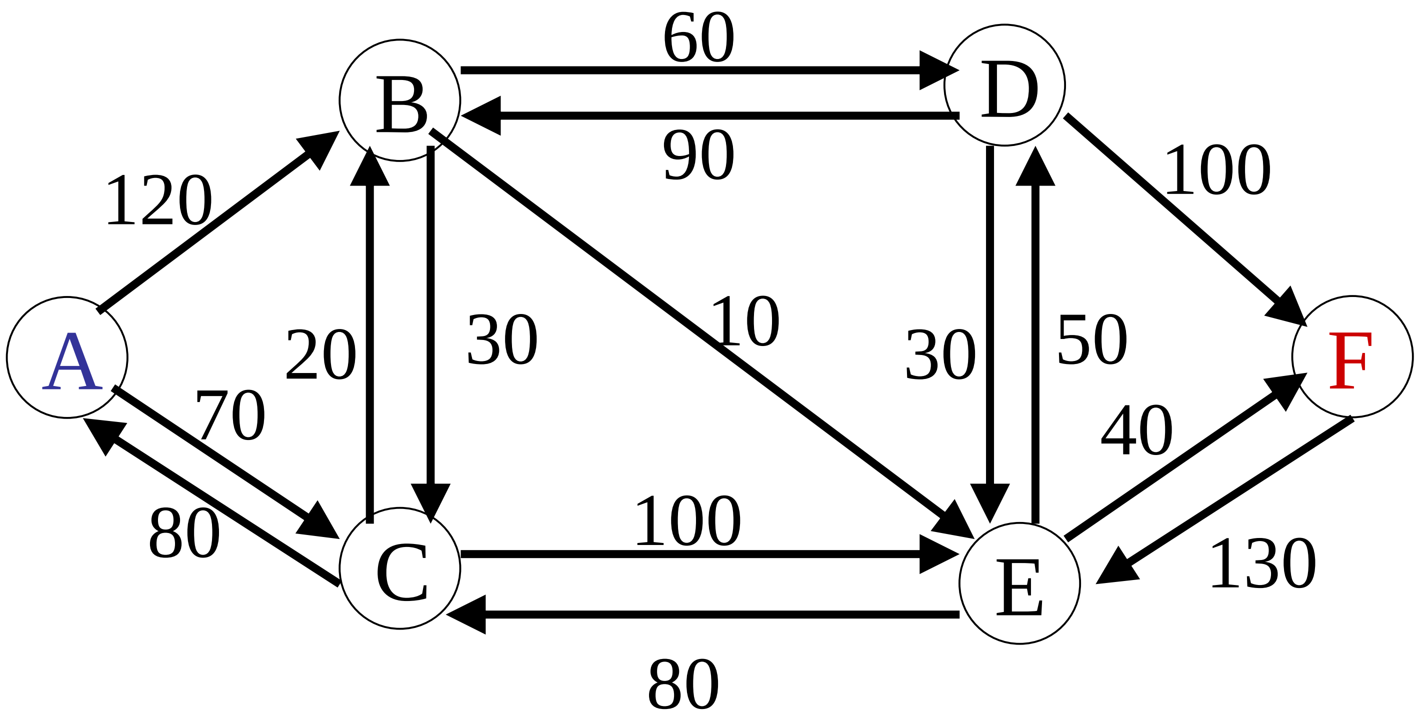


6
8
19
0
6
14
2
4
5
5
1
2
5
7
7
5
6
3
6
3
4
8
10



1
2
3
4
5
6
7
0
6
8
14
19
26
6
8
4
2
5
5
6
10
3
7
5
4
0
6
8
14
19
26
30
6
8
4
2
5
5
6
10
3
7
5
4

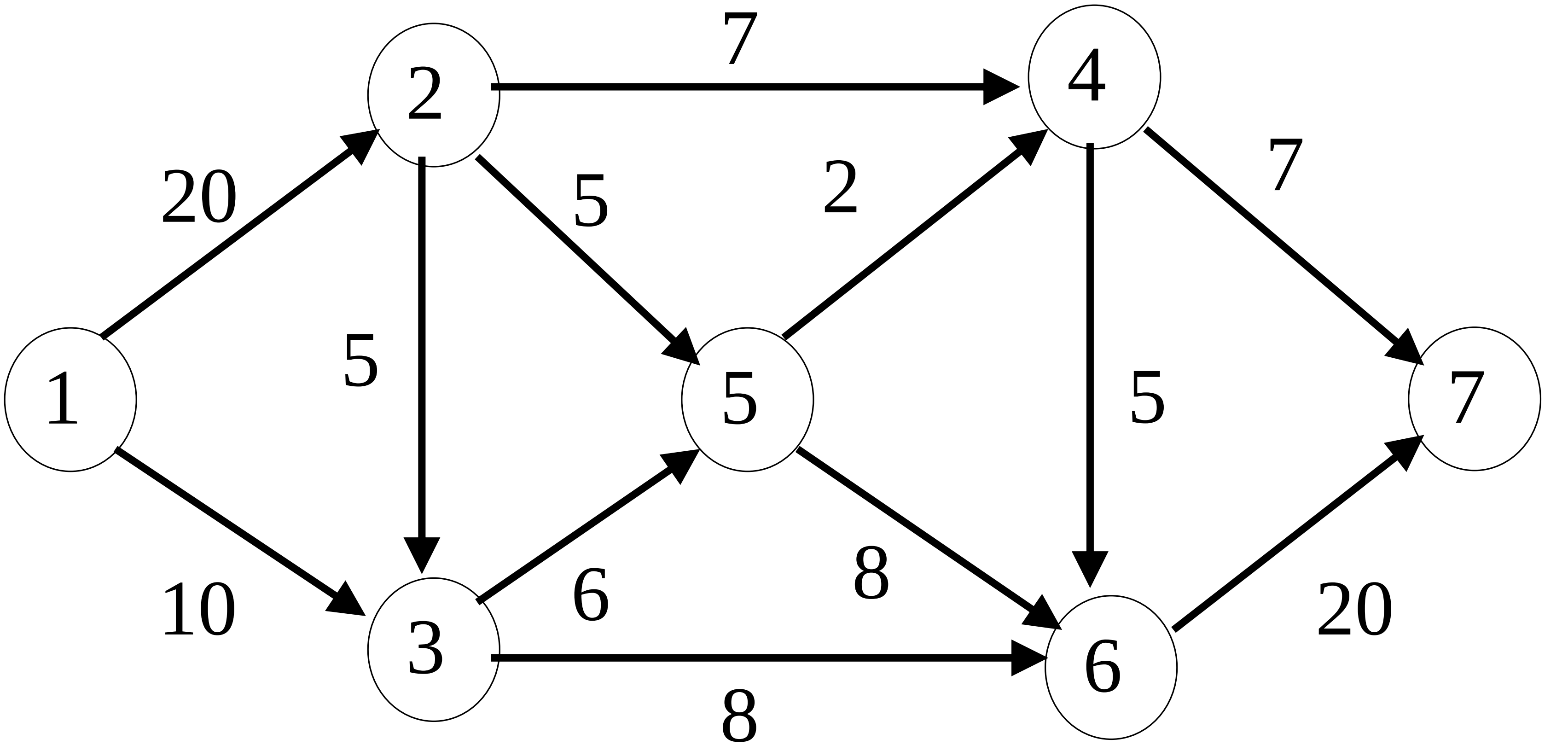
＜最大流問題と最小費用流問題＞



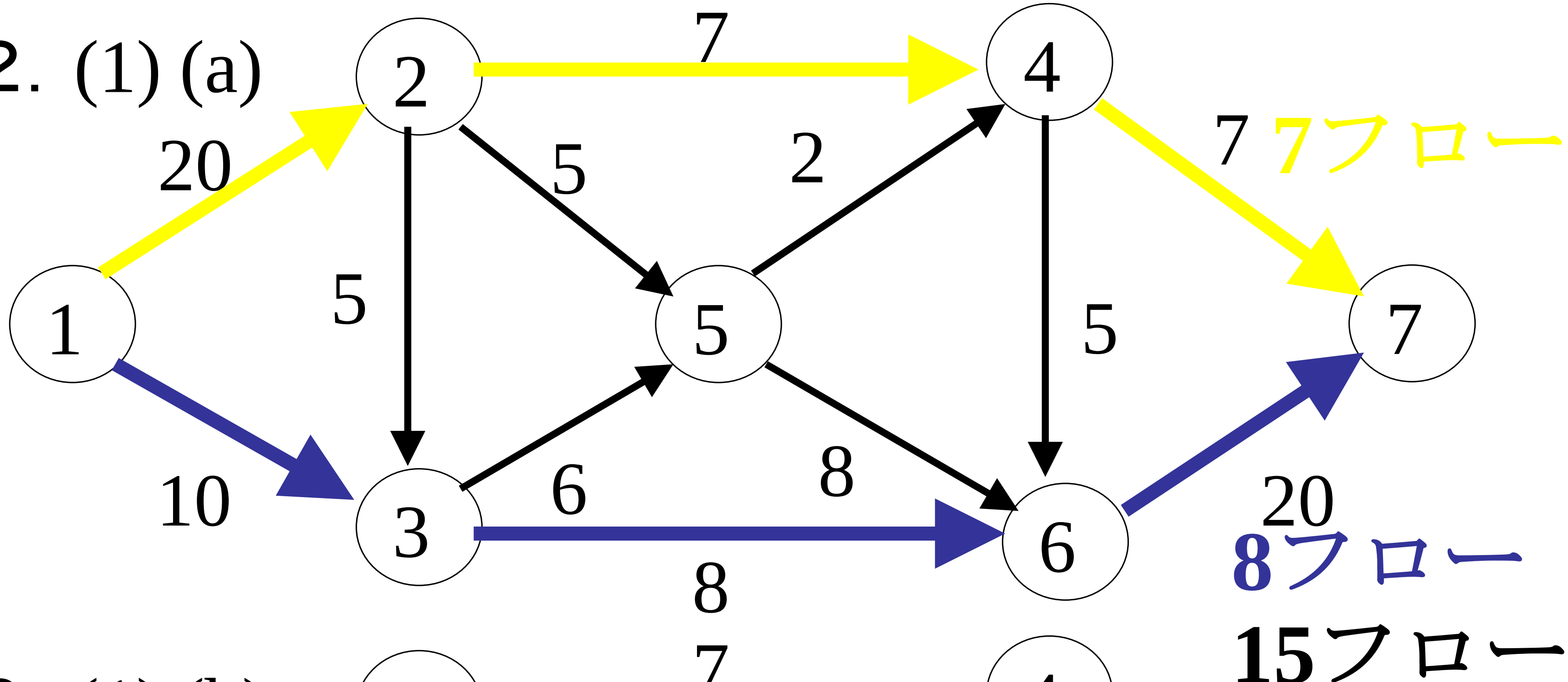
A:ソース（フローを送り出す節点）

F:シンク（フローが流入する節点）

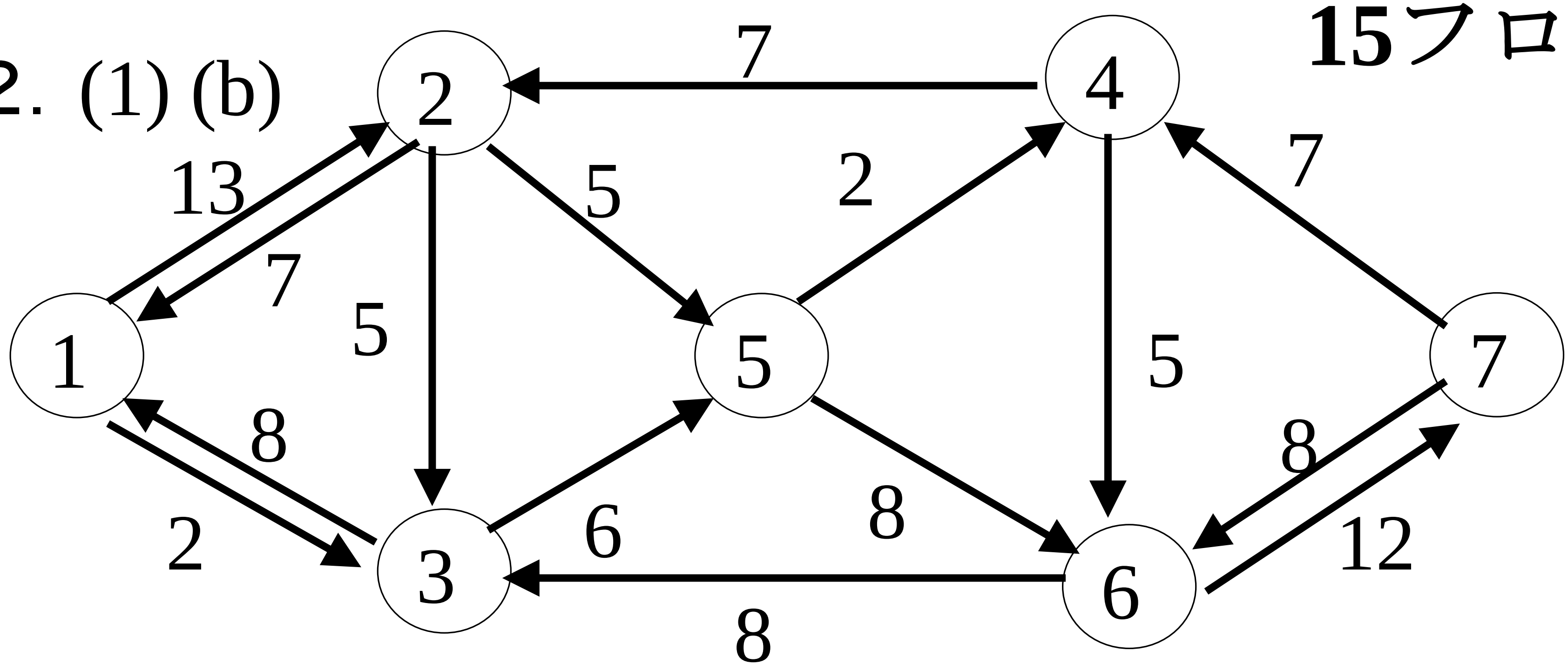
２. (1) 最大流



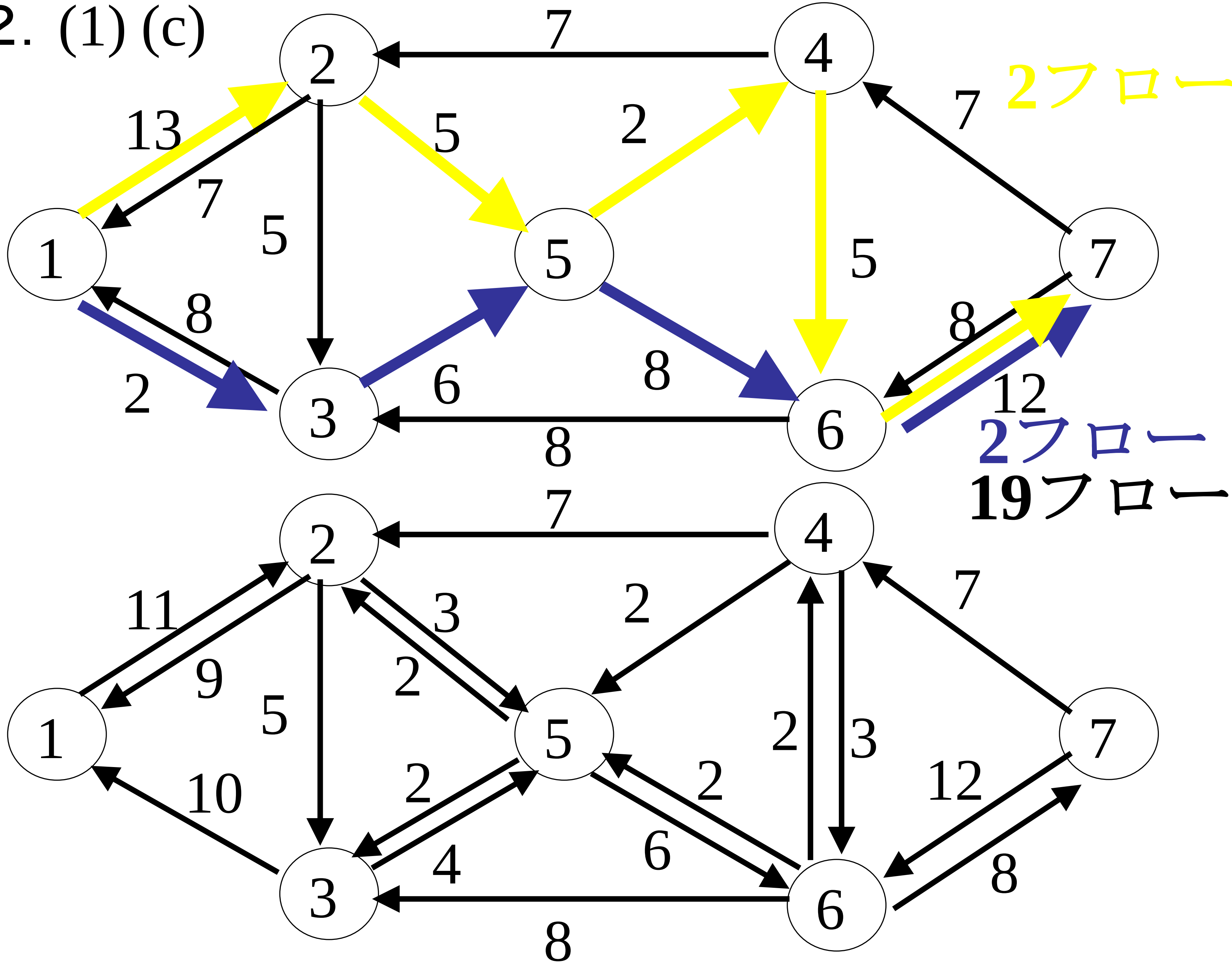
2. (1) (a)


1
2
3
4
5
6
7
20
10
7
5
5
2
5
6
8
8
7
20
7フロー
8フロー
15フロー

2. (1) (b)


1
2
3
4
5
6
7
13
7
8
2
7
5
5
2
5
6
8
8
7
8
12

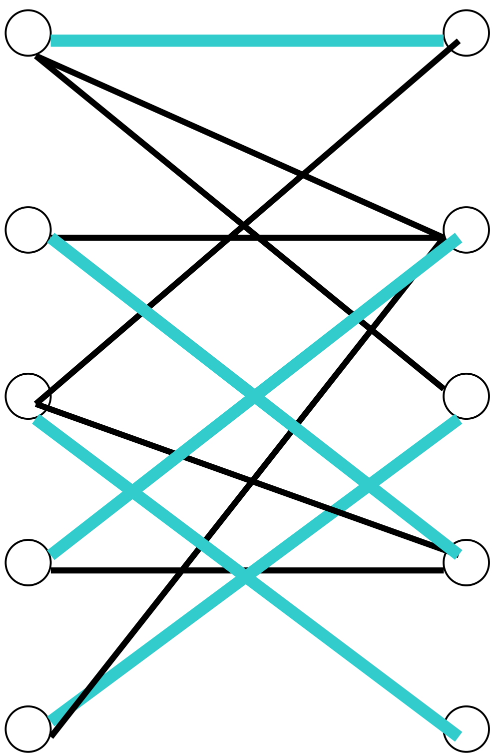
2. (1) (c)



2フロー
2フロー
19フロー
1
2
3
4
5
6
7
13
7
5
5
2
7
5
8
2
6
8
8
12
8
7
1
2
3
4
5
6
7
11
9
5
3
2
2
7
2
2
3
10
2
4
6
2
12
8
8

割当問題

２部グラフ



２部グラフの最大マッチング

計算量：$O(n^{2.5})$

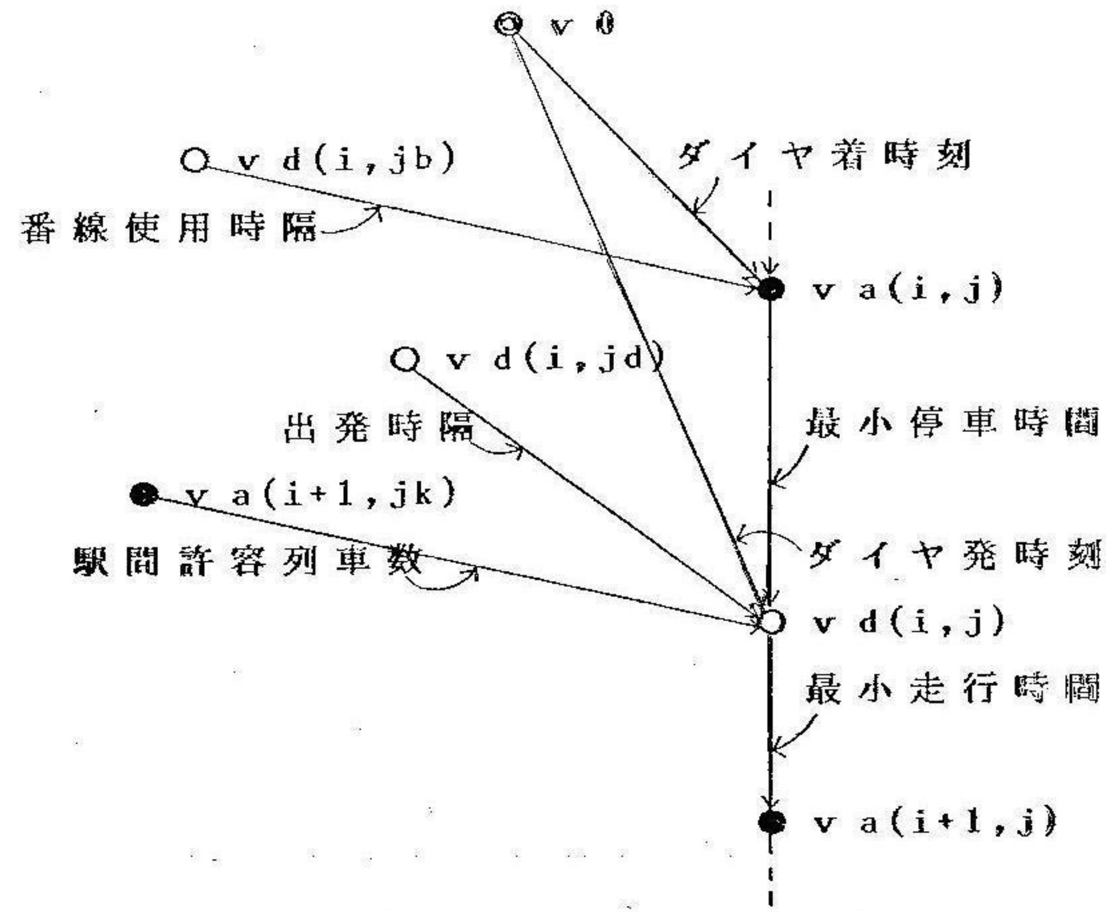
⟶ 最大流問題

２部グラフの最適k-割当

計算量：$O(kn^2)$

⟶ 最小費用流問題

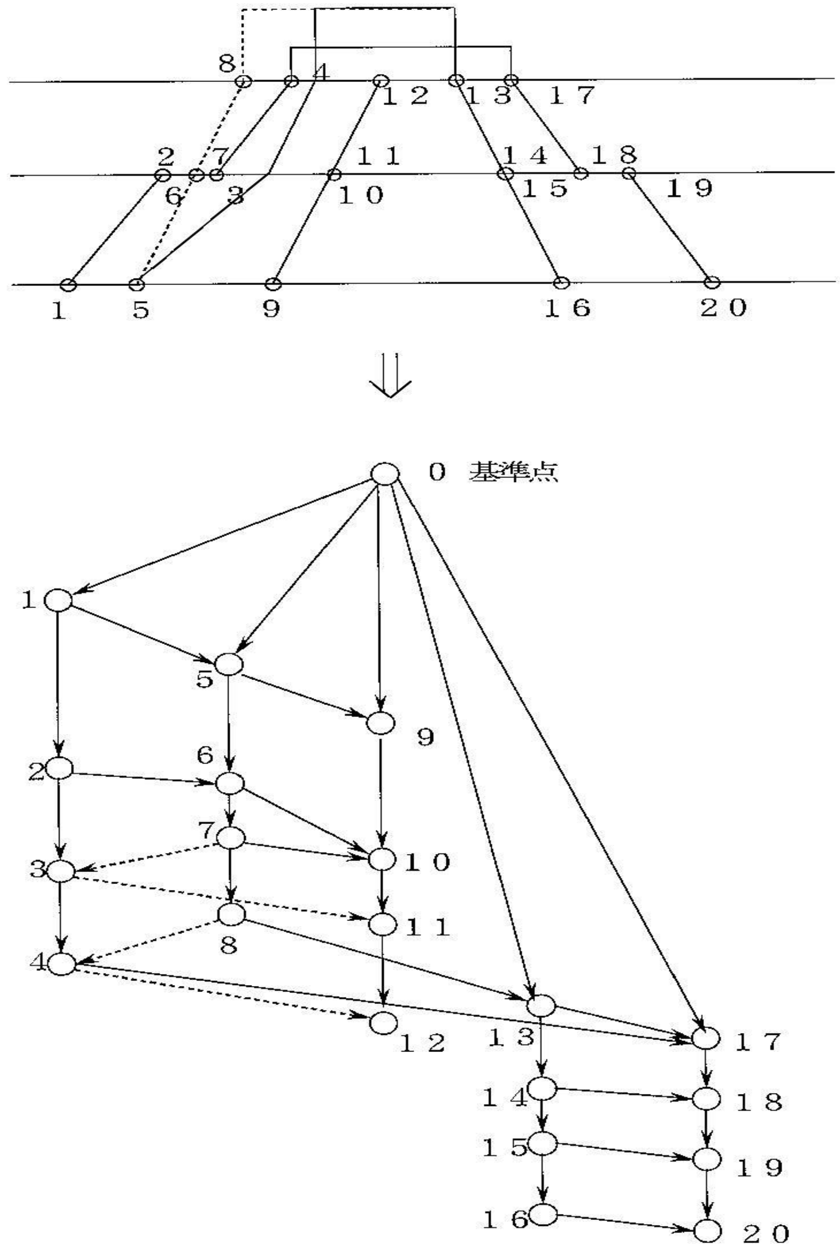
列車運行のネットワークモデル



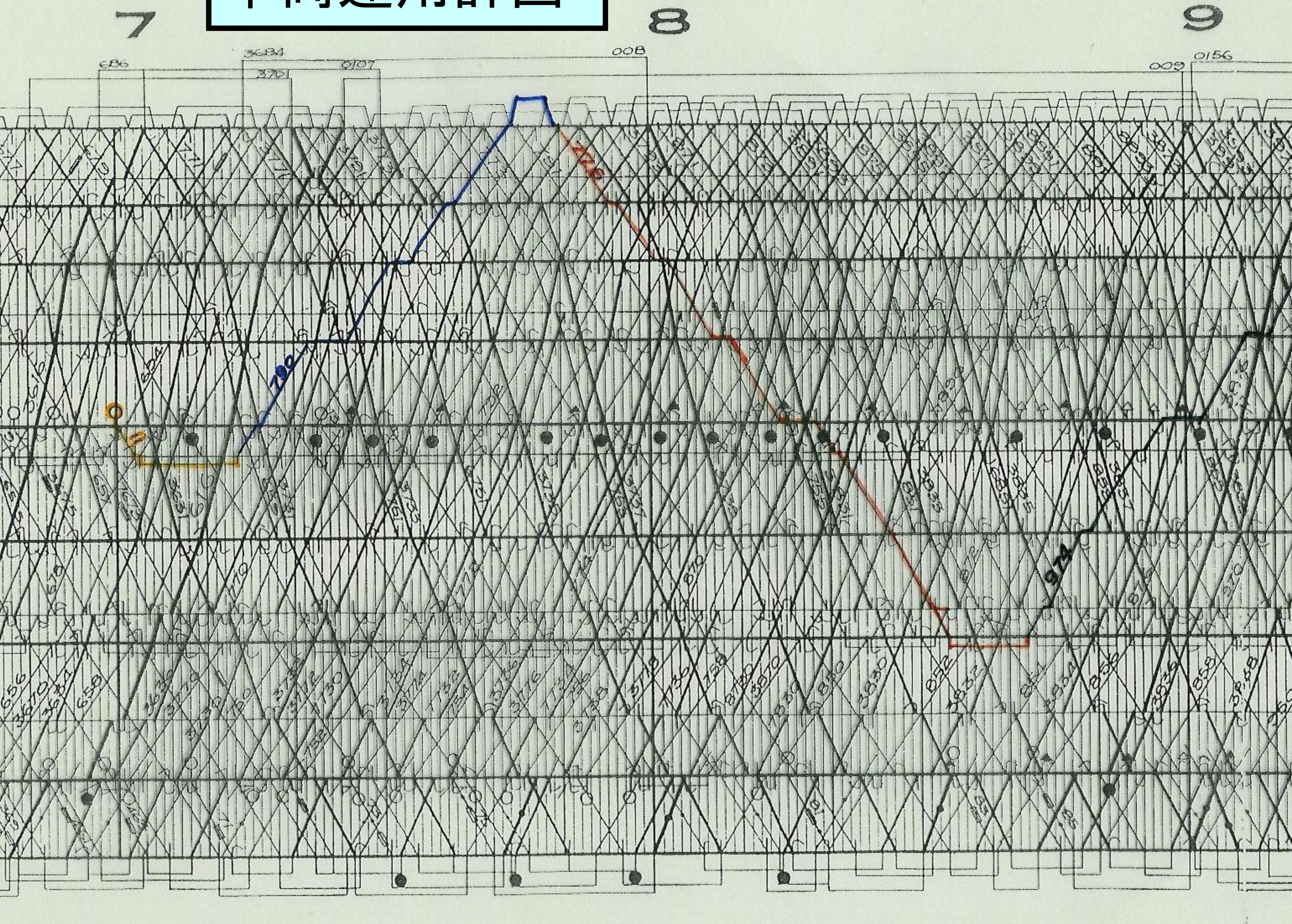
◎：基準点，●：着イベント，○発イベント

図１．列車運行のネットワーク表現

列車運行のネットワークモデル



車両運用計画



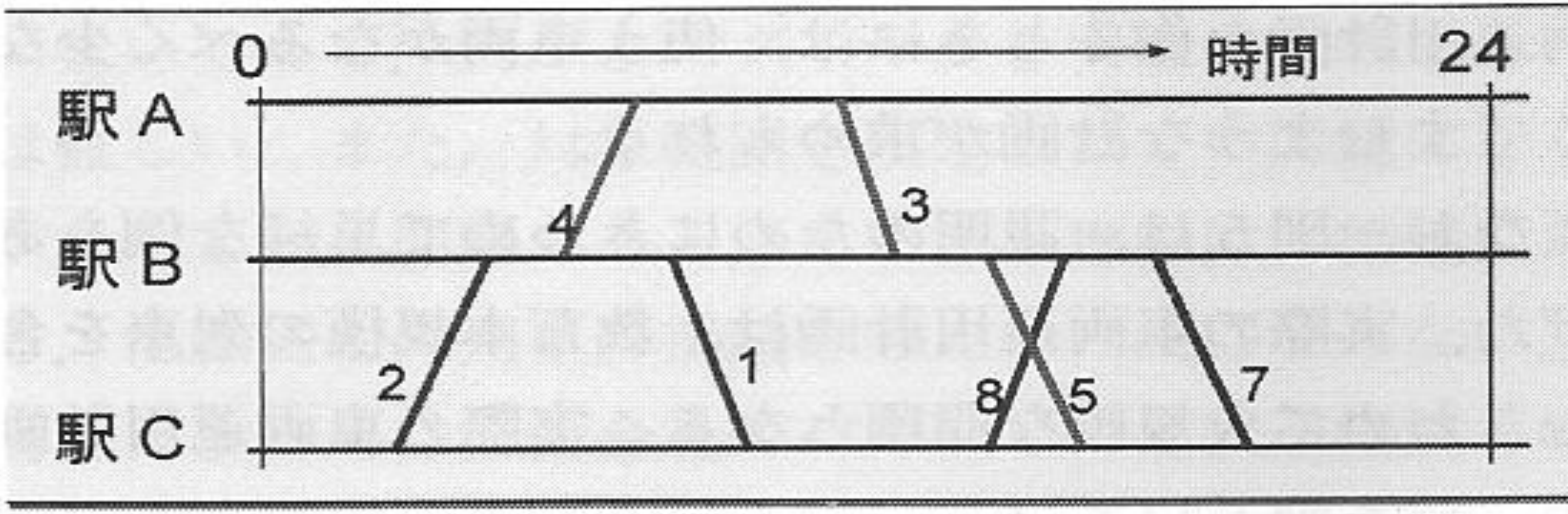


図 4　列車ダイヤ（入力）

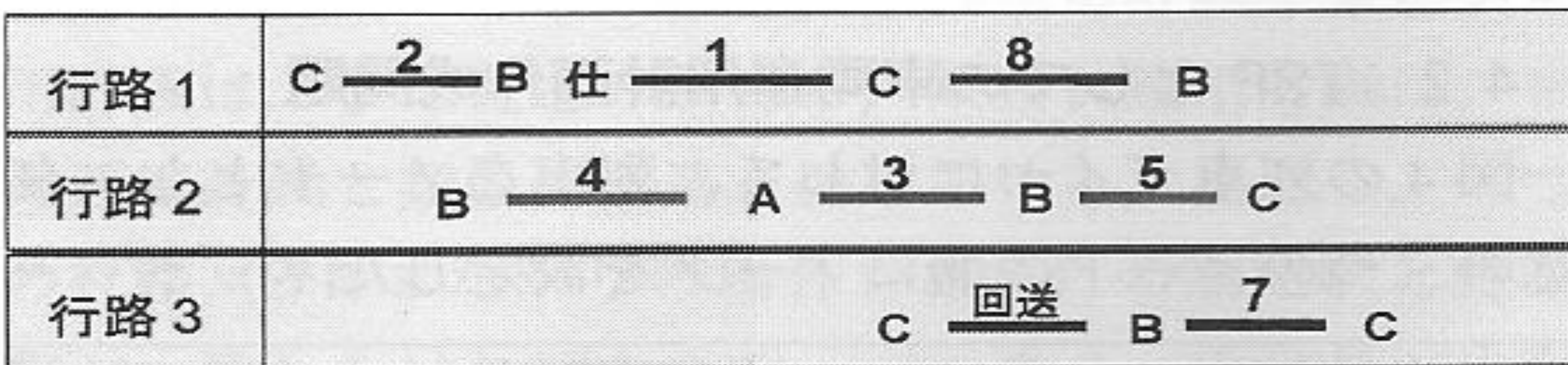


図 5　図 4 から作成した車両運用計画（出力）

最小費用循環流モデル