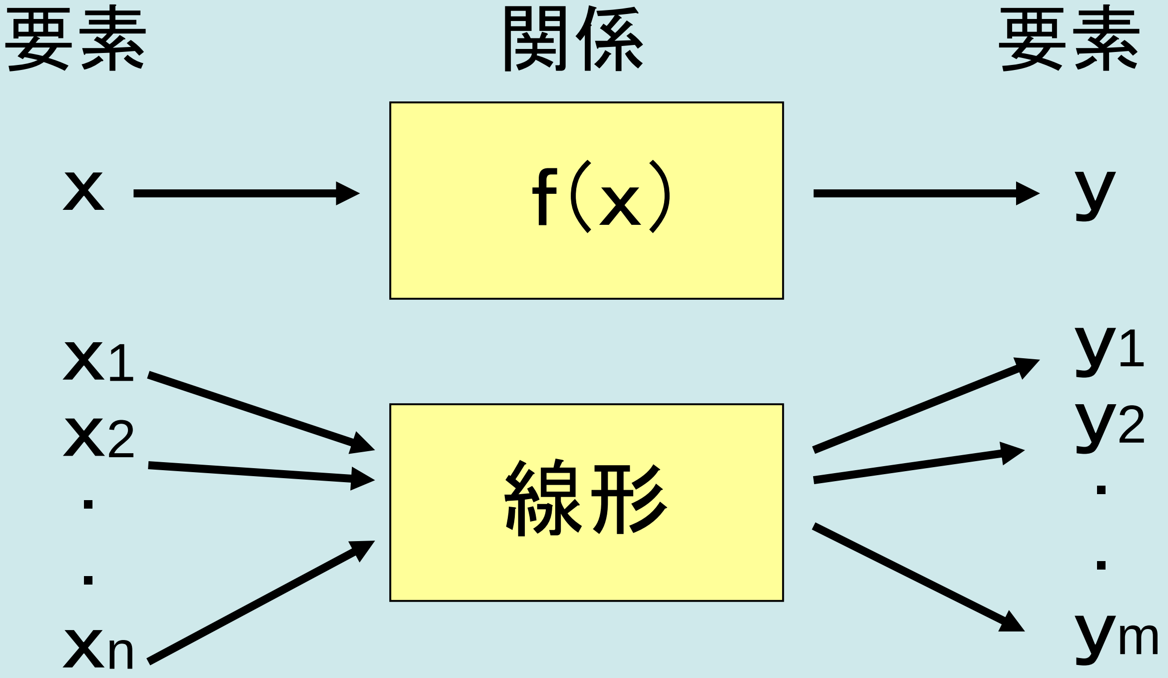
# 数学　－－－＞　抽象化、一般化

一次関数

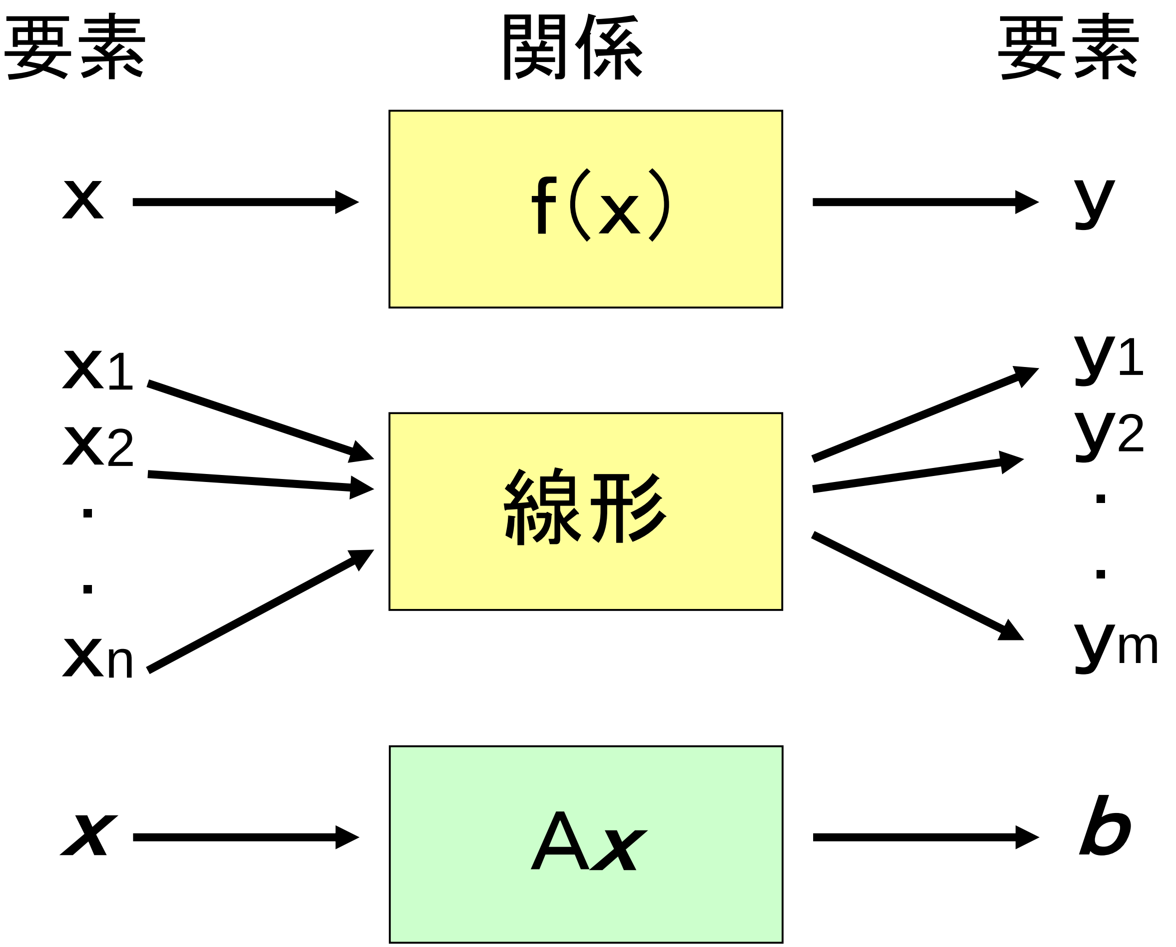
y＝ax＋b

より複雑な関係－＞解析学

より多くの要素－＞線形代数



# 連立1次方程式



# 行列は写像だ

$$\boldsymbol{x}' = A\,\boldsymbol{x} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

拡大

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

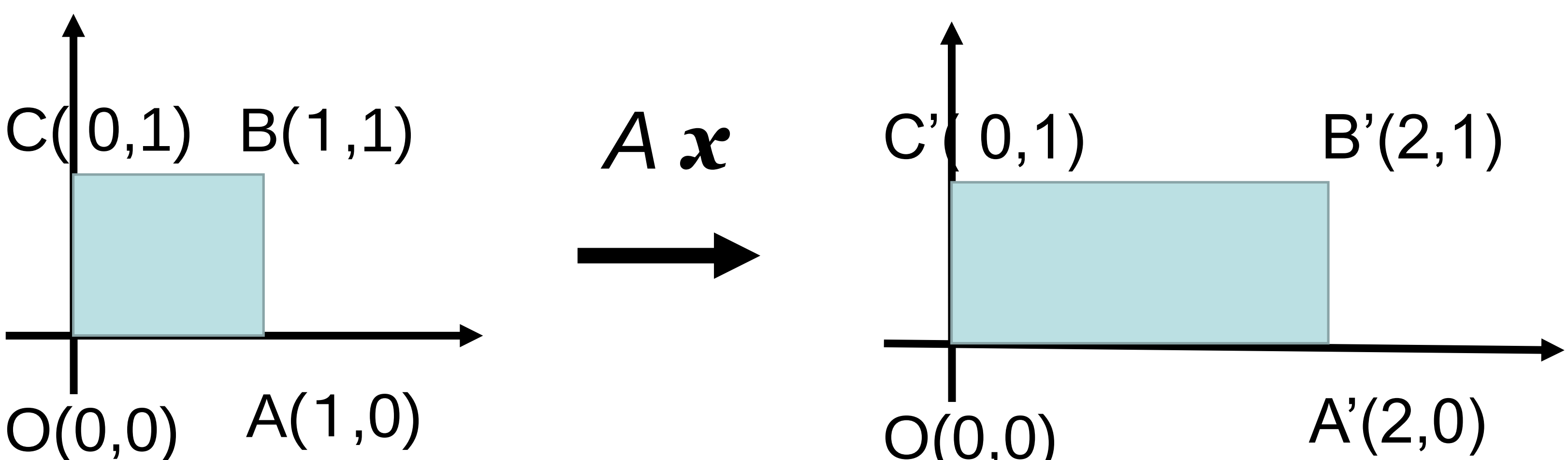
A(1,0)　A'(2,0)

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

B(1,1)　B'(2,1)

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

C(0,1)　C'(0,1)



$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

拡大

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

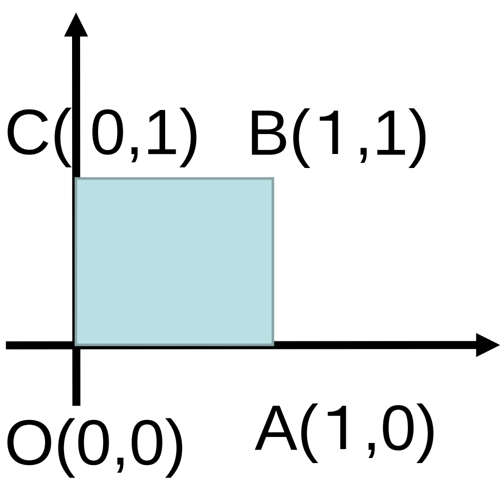
A(1,0) A’(1,0)

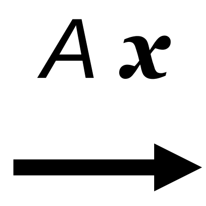
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

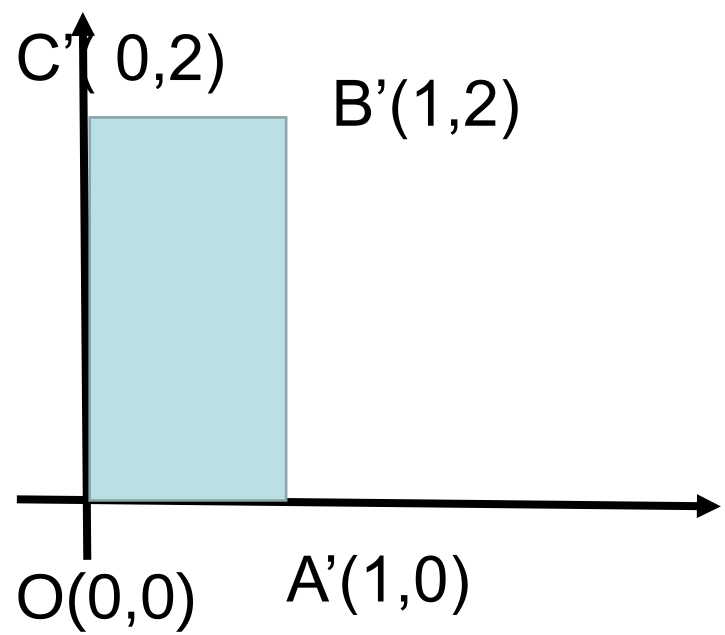
B(1,1) B’(1,2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

C(0,1) C’(0,2)



$$\boldsymbol{x}' = A\,\boldsymbol{x} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

回転

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

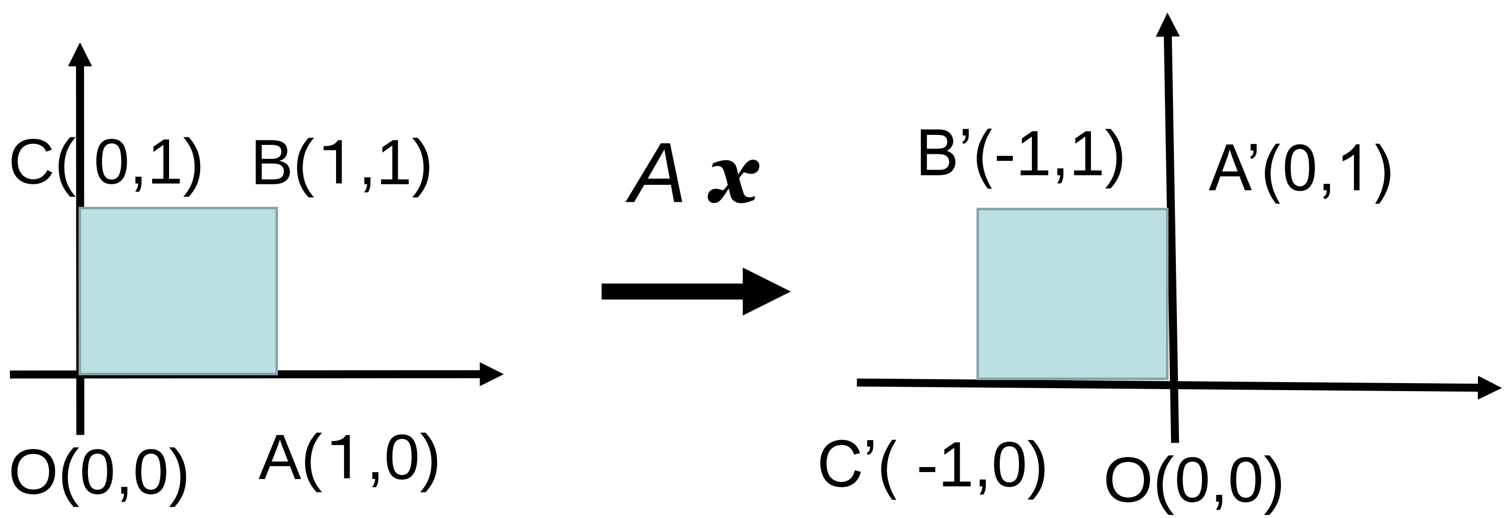
A(1,0)　A'(0,1)

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

B(1,1)　B'(-1,1)

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

C(0,1)　C'(-1,0)



$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

A(1,0) A'($\sqrt{3}$/2,1/2)

$$\boldsymbol{x}' = A\,\boldsymbol{x}$$

角θの回転

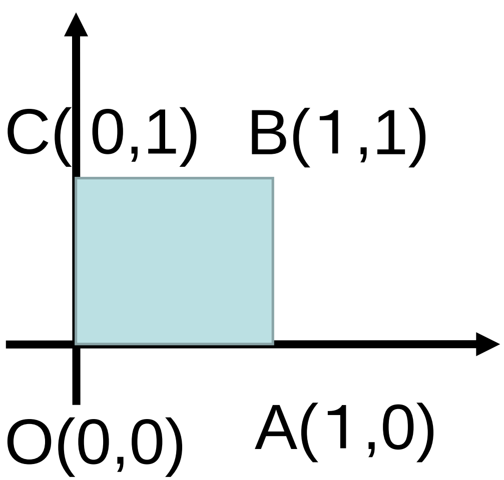
Θ=30°

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sqrt{3}-1)/2 \\ (1-\sqrt{3})/2 \end{bmatrix}$$

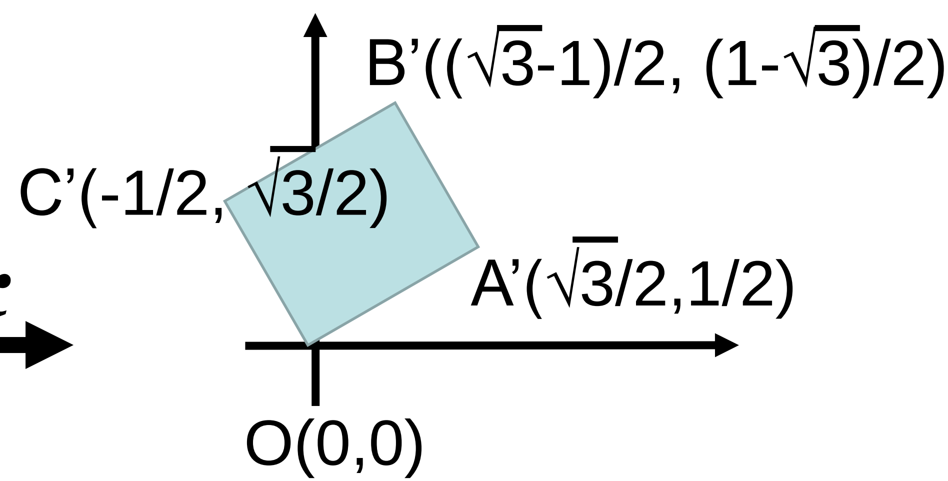
B(1,1) B'(($\sqrt{3}$-1)/2, (1-$\sqrt{3}$)/2)

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

C(0,1) C'(-1/2, $\sqrt{3}$/2)




$A\,\boldsymbol{x}$



# 行列の対角化

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$$

$$g_T(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t-8 & 10 \\ -5 & t+7 \end{vmatrix} = t^2 - t - 6 = (t-3)(t+2)$$

$\lambda = -2, 3$　　$(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

$\lambda = -2$のとき $\begin{bmatrix} -10 & 10 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,　$W(-2;T) = \left\{ \boldsymbol{c} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \ c \in R \right\}$

$\lambda = 3$のとき $\begin{bmatrix} -5 & 10 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,　$W(3;T) = \left\{ \boldsymbol{c} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \ c \in R \right\}$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

# 行列の累乗

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B^n = \begin{bmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix}$$

$$A^n = (PBP^{-1})(PBP^{-1})\cdots(PBP^{-1}) = PB^nP^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -(-2)^n + 2\cdot 3^n & 2\cdot(-2)^n - 2\cdot 3^n \\ -(-2)^n + 3^n & 2\cdot(-2)^n - 3^n \end{bmatrix}$$

# 漸化式

２つの数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$のあいだに，次の漸化式が成り立つ.

$$\begin{cases} x_n = 8x_{n-1} - 10y_{n-1} \\ y_n = 5x_{n-1} - 7y_{n-1} \end{cases} \quad (n \geqq 1) \qquad \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\{x_n\}$, $\{y_n\}$ の一般項を求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{bmatrix} \qquad A^n = \begin{bmatrix} -(-2)^n + 2\cdot 3^n & 2\cdot(-2)^n - 2\cdot 3^n \\ -(-2)^n + 3^n & 2\cdot(-2)^n - 3^n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2)^n \\ (-2)^n \end{bmatrix}$$

# 人口移動モデル

毎年，都市の人口の8割は都市に残り，２割は農村に移動し，農村の人口の7割は農村に残り，３割は都市に移動する，とする.

現在の都市の人口が$x_0$ ＝100万人,農村の人口が$y_0$ ＝ 50万人とする.

１年後の都市の人口$x_1$ ,農村の人口$y_1$ は

$$x_1 = 0.8x_0 + 0.3y_0 = 0.8\times100 + 0.3\times50 = 95$$

$$y_1 = 0.2x_0 + 0.7y_0 = 0.2\times100 + 0.7\times50 = 55$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

n年後の都市の人口$x_n$ ,農村の人口$y_n$ は

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \quad g_T(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t-0.8 & -0.3 \\ -0.2 & t-0.7 \end{vmatrix}$$

$$= t^2 - 1.5t + 0.5 = (t-1)(t-0.5)$$

$\lambda = 1, 0.5$ （$\lambda E - A$）$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{O}$

$\lambda = 1$のとき $\begin{bmatrix} 0.2 & -0.3 \\ -0.2 & 0.3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{O}$, $W(1; T) = \left\{ \boldsymbol{c} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \middle| c \in R \right\}$

$\lambda = 0.5$のとき$\begin{bmatrix} -0.3 & -0.3 \\ -0.2 & -0.2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{O}$, $W(0.5; T) = \left\{ \boldsymbol{c} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \middle| c \in R \right\}$

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$B^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5^n \end{bmatrix}$$

$$A^n = (PBP^{-1})(PBP^{-1})\cdots(PBP^{-1}) = PB^nP^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5^n \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 + 2 \cdot 0.5^n & 3 - 3 \cdot 0.5^n \\ 2 - 2 \cdot 0.5^n & 2 + 3 \cdot 0.5^n \end{bmatrix}$$

$$A^{10} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

10年後の都市と農村の人口は

$$\begin{bmatrix} x_{10} \\ y_{10} \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 \\ 60 \end{bmatrix}$$

# 均衡モデル

情報伝播

$$A = \begin{bmatrix} 1\text{-}p & q \\ p & 1\text{-}q \end{bmatrix} \quad A^n = \frac{1}{p+q} \begin{bmatrix} q & q \\ p & p \end{bmatrix}$$

「総選挙がある」と聞いた人が、他人にも総選挙があると伝える確率が8割，ないと伝える確率が2割，「総選挙はない」と聞いた人が、他人に総選挙があると伝える確率が3割，ないと伝える確率が7割，とする.

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \qquad A^n = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

最終的には6割が「総選挙がある」と聞き，４割が「総選挙はない」と聞く状態に落ち着く（均衡する）

## マーケットシェア

衛星放送のA社とB社がある．A社の契約者は1期後には8割が継続，2割がB社に変更し，B社の契約者は1期後には7割が継続，3割がA社に変更する，とする．

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \qquad A^n = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

最終的にはマーケットのシェアはA社が6割，B社が4割に収束する（均衡する）．

# 線形計画法の基礎

線形計画法（せんけいけいかくほう）は，利益を最大にする問題などに対して最適な解を求める方法である。線形計画法の解の求め方は，作図から求める方法などがある。また，表計算ソフトウェアや，表計算ソフトウェアに組み込まれているツールを利用することもできる。ここでは，基本的な例題をもとに線形計画法の解の求め方について学習しよう。

**線形計画法**は，会社で何かを仕入れたいときに，ある条件のもとでどのようにすれば利益が最大になるか，あるいは，どのようにすれば倉庫の在庫費用を最小にできるか，などの問題に対して最適な解を求めるための方法である。

このような問題は，連立一次方程式（または連立一次不等式）で条件をあらわすことができる。さらに，利益や費用など，最大や最小にすることが目的である式も一次式であらわすことができる問題であれば，線形計画法を用いて解を求めることができる。

## 例題1　パソコンの仕入れをする

ある電気店でパソコンを仕入れることになった。倉庫は全体で30ブロック使うことができ，仕入れ金額の上限は150万円までと決められている。また，ノートパソコンとデスクトップパソコンの条件は，表のとおりである。このとき，利益が最大になるように仕入れるには，それぞれ何台ずつ仕入れればよいか考えてみよう。

| 条件 | デスクトップパソコン | ノートパソコン |
|---|---|---|
| 倉庫占有ブロック（1台あたり） | 3ブロック | 2ブロック |
| 仕入れ金額（1台あたり） | 10万円 | 15万円 |
| 利益（1台あたり） | 4万円 | 3万円 |

| 条件 | デスクトップパソコン | ノートパソコン |
|---|---|---|
| 倉庫占有ブロック（1台あたり） | 3ブロック | 2ブロック |
| 仕入れ金額（1台あたり） | 10万円 | 15万円 |
| 利益（1台あたり） | 4万円 | 3万円 |

## ▶ 1．制約条件式と目的関数を求める

パソコンのおき場所と予算の２つを考慮して利益を最大にする問題である。まず，条件を考えていくことにする。１つは倉庫の占有ブロック数であるスペース，もう１つは仕入れ金額の上限である。倉庫の占有ブロック数は30ブロックにかぎられている。

デスクトップパソコンの個数をx，ノートパソコンの個数をyとして，倉庫の占有ブロック数を求めると，式(1)となる。また，仕入れ金額は，式(2)となる①。

$$3x + 2y \leqq 30 \qquad \cdots\cdots\cdots \ (1)$$

$$10x + 15y \leqq 150 \qquad \cdots\cdots\cdots \ (2)$$

これらの条件式を**制約条件式**とよぶ②。

次に，利益をpとすると，利益を求める式は(3)のようになる。この式は，利益を考えるための最終目的となる式なので，**目的関数**とよばれる。

$$p = 4x + 3y \qquad \cdots\cdots\cdots \ (3)$$

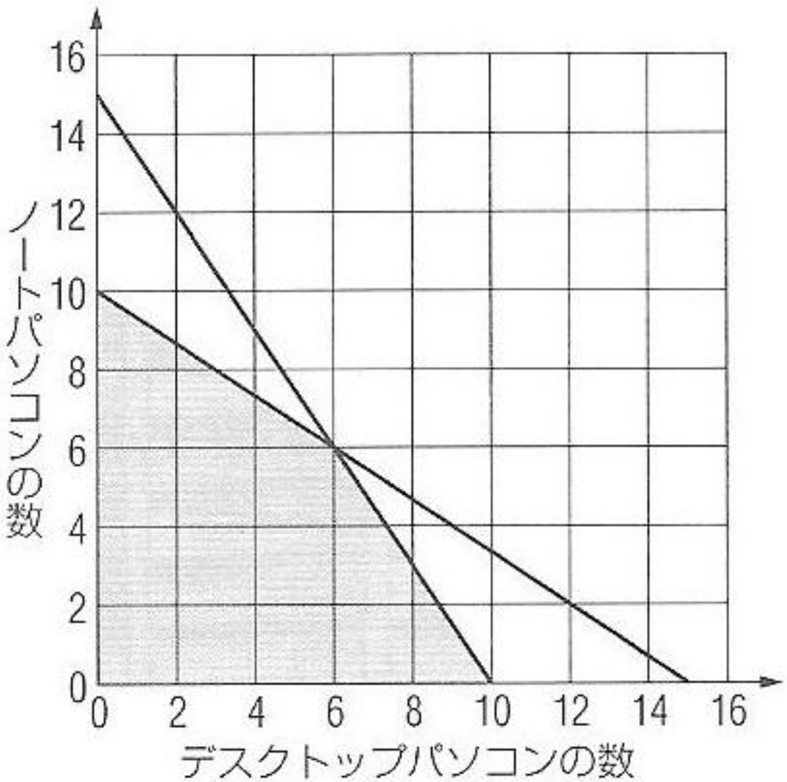
①変数xとyは負ではないので，非負変数という。
②このような式を連立不等式という。

# 2. グラフ化する

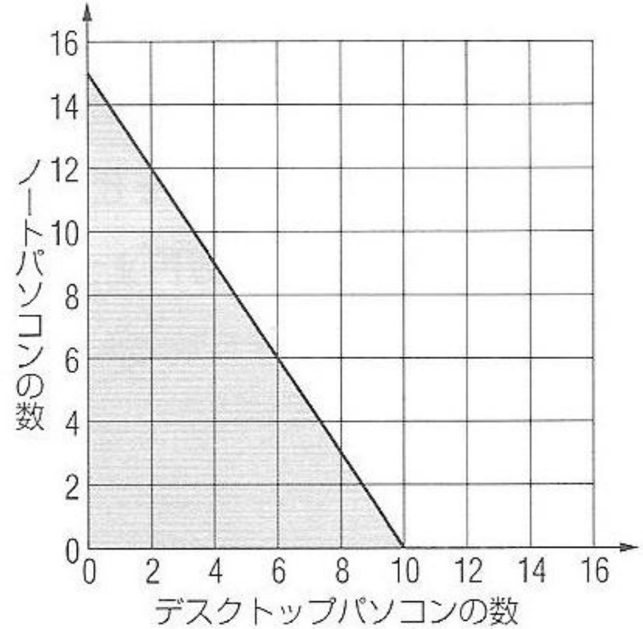
## 制約条件式

$3x + 2y \leqq 30$ ……… (1)

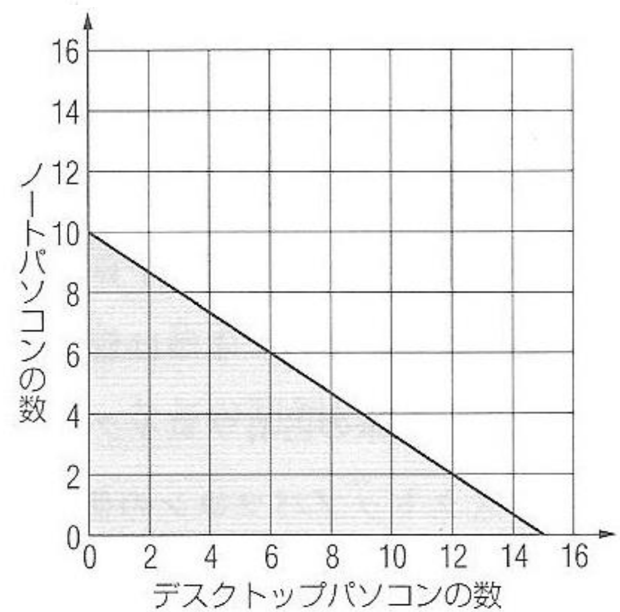
$10x + 15y \leqq 150$ ……… (2)




■図3　制約条件




■図1　場所の制約条件




■図2　仕入れ金額の制約条件

# 目的関数

$p = 4x + 3y$ $\quad\quad y = -\dfrac{4}{3}x + \dfrac{1}{3}p$ ……… (3)'

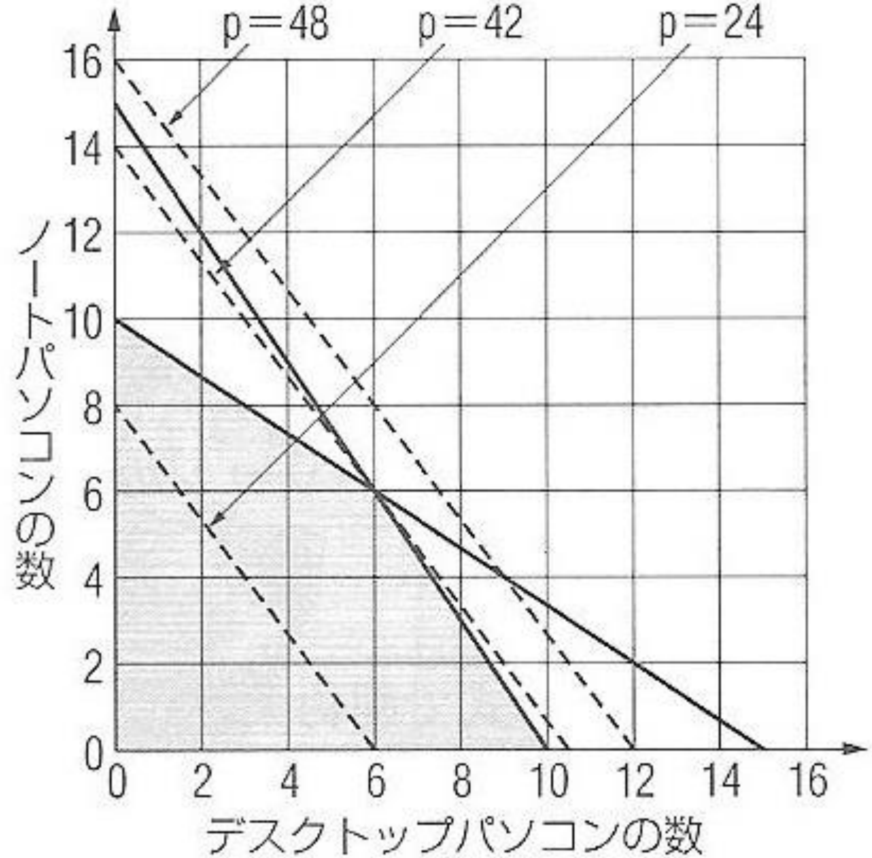
$p = 48$ は制約条件の外側

$p = 24$ は利益は大きくない

交点を通る直線で$p$が最大

$x = 6, \quad y = 6$

目的関数の値は$p = 42$




■図4　最大利益

作図によるとき方の手順をまとめると，次のとおりである。

①制約条件式の作成

②目的関数の作成

③制約条件式のグラフをかき，制約条件をすべて満たす範囲を表示

④目的関数のグラフをかき，制約条件の範囲にある最大点となる値の決定

⑤最適解を算出

**問1** 例題１の仕入れ金額が変更になり175万円となった。この場合，デスクトップ，ノートパソコンをそれぞれ何台ずつ仕入れると，利益がいくらで最大になるか求めなさい。

# 線形計画モデル

## 生産計画問題

４種類の原料A，B，C，Dを用いて、３種類の製品I,II,III を生産している工場が、最大の利益をあげるにはどのような生産計画をたてればよいか。

変数：各製品 I,II,III の生産量　$x_1$，$x_2$，$x_3$

製品を1単位生産するごとに得られる利益

製品 I,II,III ：70万円、120万円、30万円

# 生産計画問題のデータ

| | I | II | III |
|---|---|---|---|
| A | 5 | 0 | 6 |
| B | 0 | 2 | 8 |
| C | 7 | 0 | 15 |
| D | 3 | 11 | 0 |

## 原料の利用可能量

A：80単位
B：50単位
C：100単位
D：70単位

目的関数：$70x_1 + 120x_2 + 30x_3 \longrightarrow$ 最大

制約条件：

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
5x_1 & & & + & 6x_3 & \leqq & 80 \\
 & & 2x_2 & + & 8x_3 & \leqq & 50 \\
7x_1 & & & + & 15x_3 & \leqq & 100 \\
3x_1 & + & 11x_2 & & & \leqq & 70
\end{array}
$$

$$x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0, \quad x_3 \geqq 0$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 8 \\ 7 & 0 & 15 \\ 3 & 11 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 80 \\ 50 \\ 100 \\ 70 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 70 \\ 120 \\ 30 \end{bmatrix}$$

目的関数: ${}^t\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x} \longrightarrow$ 最大

制約条件: $A\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{b},\ \ \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$

＜標準形＞

目的関数: ${}^t\boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x} \longrightarrow$ 最小

制約条件: $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \ \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$

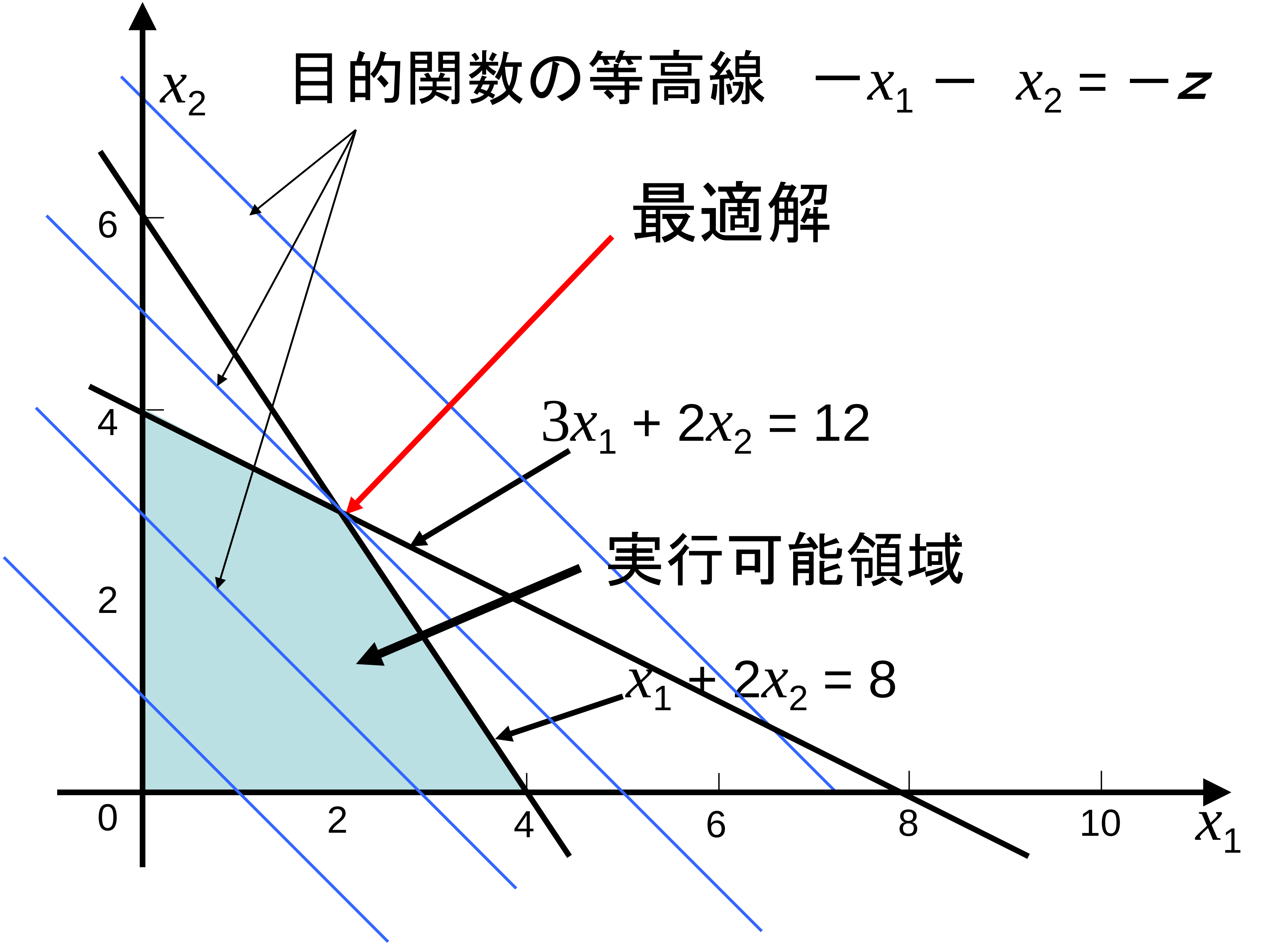
# 基底解と最適解

目的関数： $-x_1 - x_2 \longrightarrow$ 最小

制約条件：

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 &\leqq 12 \\
x_1 + 2x_2 &\leqq 8
\end{aligned}
$$

$$x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0$$



目的関数の等高線　$-x_1 - x_2 = -z$
最適解
$3x_1 + 2x_2 = 12$
実行可能領域
$x_1 + 2x_2 = 8$
$x_2$
$x_1$
0
2
4
6
8
10

＜2変数の線形計画問題＞

実行可能領域：平面上の凸多角形

目的関数の等高線：平行な直線

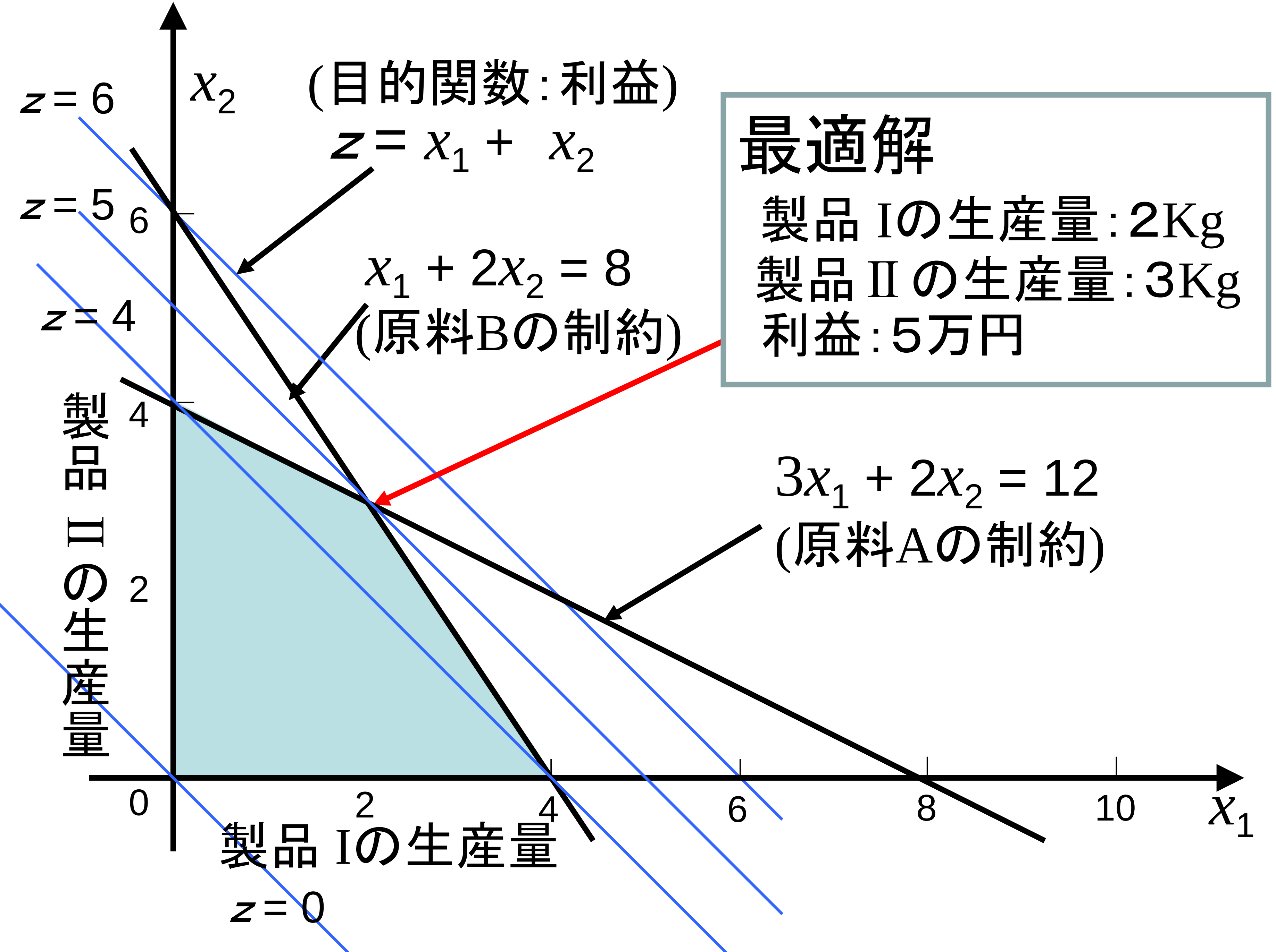
最適解：凸多角形の境界上に存在

＜一般の線形計画問題＞

実行可能領域：空間$R^n$上の凸多面体

最適解：凸多面体の頂点のなかに存在

シンプレックス法（単体法）：G.B.Dantzig (1947)


(目的関数:利益)
z = x1 + x2
x1 + 2x2 = 8
(原料Bの制約)
3x1 + 2x2 = 12
(原料Aの制約)
最適解
製品 Iの生産量:2Kg
製品 IIの生産量:3Kg
利益:5万円
z = 6
z = 5
z = 4
z = 0
x2
x1
製品 IIの生産量
製品 Iの生産量
0
2
4
6
8
10

＜標準形＞

目的関数:　$-x_1 - x_2 \longrightarrow$ 最小

制約条件:

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 + x_3 \phantom{{}+x_4} &= 12 \\
x_1 + 2x_2 \phantom{{}+x_3} + x_4 &= 8
\end{aligned}
$$

$$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0,\ x_4 \geqq 0$$

２つの変数を適当に選んでそれらを0とおけば、残りの２つの変数は一意的に定まる。

$\longrightarrow$ 基底解

基底解のうち $\boldsymbol{x} \geqq 0$ を満たすもの

$\longrightarrow$ 実行可能基底解

基底解を定める際に0 とおいた変数

$\longrightarrow$ 非基底変数　$\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$

それ以外の変数

$\longrightarrow$ 基底変数　$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \phantom{+ x_4} &= 12 \\ x_1 + 2x_2 \phantom{+ x_3} + x_4 &= 8 \end{aligned}$$

(f) $x_1 = x_2 = 0$

$$\begin{aligned} x_3 &= 12 \\ x_4 &= 8 \end{aligned} \qquad z = 0$$

$$\boldsymbol{x} = (0,0,12,8)^T : \boldsymbol{x}_B = (x_3,x_4)^T,\ \boldsymbol{x}_N = (x_1,x_2)^T$$

(c) $x_2 = x_3 = 0$

$$\begin{aligned} 3x_1 \phantom{+ x_4} &= 12 \\ x_1 + x_4 &= 8 \end{aligned} \qquad z = 4$$

$$\boldsymbol{x} = (4,0,0,4)^T : \boldsymbol{x}_B = (x_1,x_4)^T,\ \boldsymbol{x}_N = (x_2,x_3)^T$$

(a) $x_3 = x_4 = 0$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 12 \\ x_1 + 2x_2 &= 8 \end{aligned} \qquad z = 5$$

$$\boldsymbol{x} = (2,3,0,0)^T : \boldsymbol{x}_B = (x_1,x_2)^T,\ \boldsymbol{x}_N = (x_3,x_4)^T$$

(a) $\boldsymbol{x} = (2,3,0,0)^{\mathrm{T}}$ : 基底変数 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = (x_1,x_2)^{\mathrm{T}}$,

非基底変数 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = (x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$

(b) $\boldsymbol{x} = (8,0,-12,0)^{\mathrm{T}}$ : $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = (x_1,x_3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = (x_2,x_4)^{\mathrm{T}}$

(c) $\boldsymbol{x} = (4,0,0,4)^{\mathrm{T}}$ : $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = (x_1,x_4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = (x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$

(d) $\boldsymbol{x} = (0,4,4,0)^{\mathrm{T}}$ : $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = (x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = (x_1,x_4)^{\mathrm{T}}$

(e) $\boldsymbol{x} = (0,6,0,-4)^{\mathrm{T}}$ : $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = (x_2,x_4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = (x_1,x_3)^{\mathrm{T}}$

(f) $\boldsymbol{x} = (0,0,12,8)^{\mathrm{T}}$ : $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = (x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = (x_1,x_2)^{\mathrm{T}}$

$\boxed{x_1 = 0}$ $x_2$ 軸

$\boxed{x_2 = 0}$ $x_1$ 軸

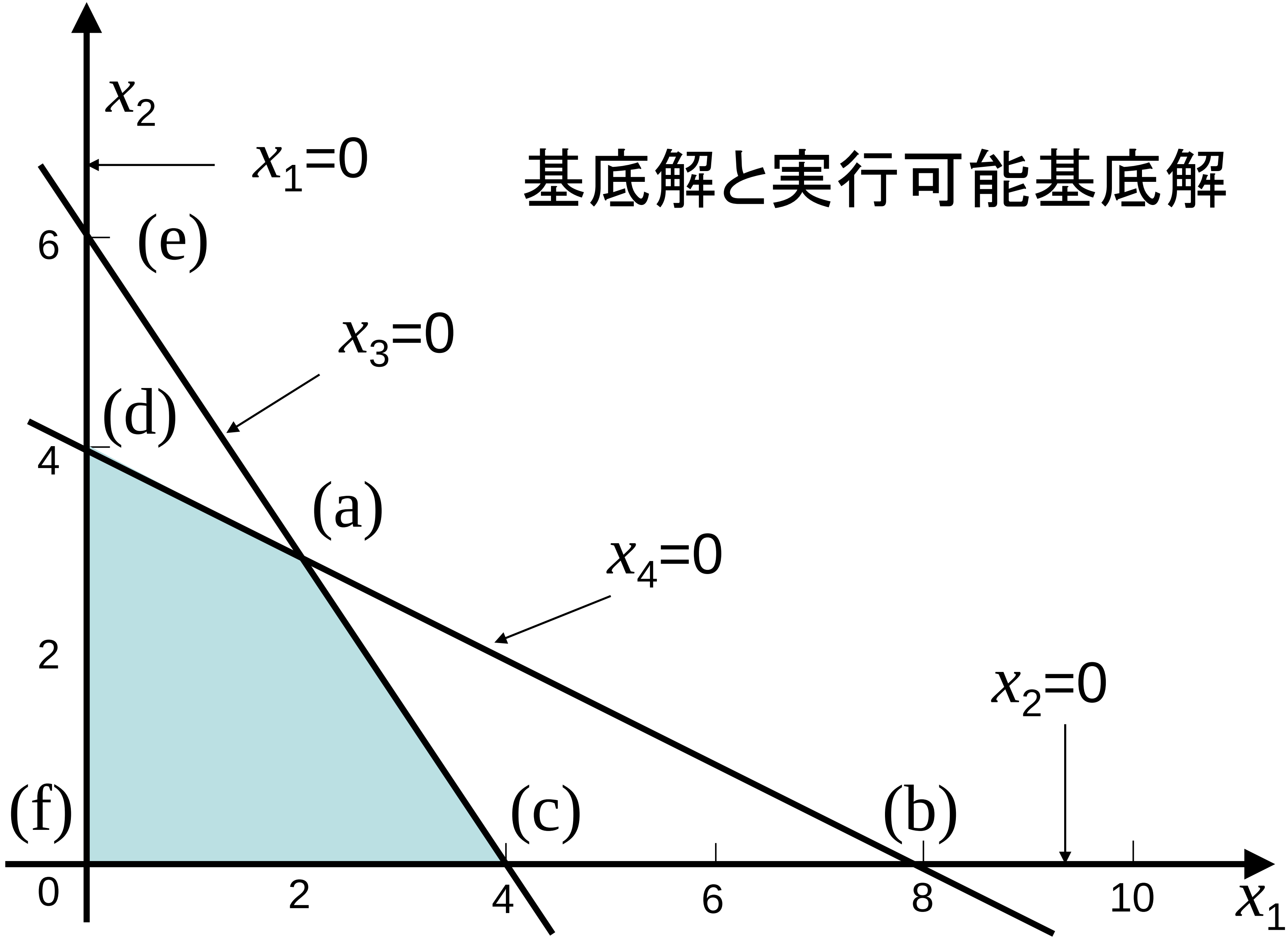
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 12$$

$\boxed{x_3 = 0}$ 直線: $3x_1 + 2x_2 = 12$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 8$$

$\boxed{x_4 = 0}$ 直線: $x_1 + 2x_2 = 8$

# 基底解と実行可能基底解



実行可能
基底解

対応

実行可能領域
（凸多面体）の頂点

1組の基底変数と非
基底変数の入れ替え

ピボット操作

1つの頂点から隣り
合う別の頂点に移動

＜最適性の判定＞

$$\mathrm{A} = (\mathrm{B}, \mathrm{N})$$

$$\mathrm{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\mathrm{B}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \mathrm{N}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{b}$$

$$\mathrm{B}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{b} - \mathrm{N}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$$

$$\mathrm{B}^{-1}\mathrm{B}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \mathrm{B}^{-1}(\boldsymbol{b} - \mathrm{N}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}})$$

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \mathrm{B}^{-1}\mathrm{N}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$$

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \mathrm{B}^{-1}\mathrm{N}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$$

目的関数に代入

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}{}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}{}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \\
&= \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}{}_{\mathrm{B}}(\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \mathrm{B}^{-1}\mathrm{N}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}) + \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}{}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \\
&= \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}{}_{\mathrm{B}}\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}{}_{\mathrm{N}} - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}{}_{\mathrm{B}}\mathrm{B}^{-1}\mathrm{N})\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}
\end{aligned}$$

$\pi = (\mathrm{B}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}$ とする（π：シンプレックス乗数）

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}{}_{\mathrm{N}} - \pi^{\mathrm{T}}\mathrm{N} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}{}_{\mathrm{N}} - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}{}_{\mathrm{B}}\mathrm{B}^{-1}\mathrm{N} \geqq \mathbf{0}$$

が成り立つならば最適解