# ＜最適化の概念＞

最適化すべき問題

数学モデル

変数，数式

数理計画法

定められた計算手順を用いて解くための方法論

## ＜数理計画＞

対象とする数理モデルが現実のどのような問題を定式化したものであるかにかかわらず、数学的構造がおなじであれば共通の方法が適用できる。

# ＜数理計画モデル＞

- 線形計画問題
- ネットワーク計画問題
- 非線形計画問題
- 組合せ計画問題

# 線形計画モデル

## <生産計画問題＞

4種類の原料A, B, C, Dを用いて、3種類の製品I,II,III を生産している工場が、最大の利益をあげるにはどのような生産計画をたてればよいか。

変数：各製品 I,II,III の生産量

$x_1$, $x_2$, $x_3$

製品を1単位生産するごとに得られる利益

製品 I,II,III ：70万円、120万円、30万円

各製品を$x_1$, $x_2$, $x_3$単位づつ生産したときの総利益

$$70x_1 + 120x_2 + 30x_3$$ （万円）

$\longrightarrow$ 最大化

目的関数

# 生産計画問題のデータ

| | I | II | III |
|---|---|---|---|
| A | 5 | 0 | 6 |
| B | 0 | 2 | 8 |
| C | 7 | 0 | 15 |
| D | 3 | 11 | 0 |

## 原料の利用可能量

A：80単位

B：50単位

C：100単位

D：70単位

$$\left.\begin{array}{rrrcr} 5x_1 & & +\ 6x_3 & \leqq & 80 \\ & 2x_2 & +\ 8x_3 & \leqq & 50 \\ 7x_1 & & +\ 15x_3 & \leqq & 100 \\ 3x_1 & +\ 11x_2 & & \leqq & 70 \\ \\ \multicolumn{5}{c}{x_1 \geqq 0,\quad x_2 \geqq 0,\quad x_3 \geqq 0} \end{array}\right]$$

制約条件

<線形計画問題>

目的関数：$70x_1 + 120x_2 + 30x_3 \longrightarrow$ 最大

制約条件：

$$
\begin{aligned}
5x_1 & & &+ 6x_3 &\leqq 80\\
& & 2x_2 &+ 8x_3 &\leqq 50\\
7x_1 & & &+ 15x_3 &\leqq 100\\
3x_1 &+ & 11x_2 & &\leqq 70
\end{aligned}
$$

$$x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0, \quad x_3 \geqq 0$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 8 \\ 7 & 0 & 15 \\ 3 & 11 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 80 \\ 50 \\ 100 \\ 70 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 70 \\ 120 \\ 30 \end{bmatrix}$$

目的関数: $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \longrightarrow$ 最大

制約条件: $A\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$

# 数理計画法

目的関数:

$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2 \cdots x_n)$

－＞最小化

制約条件:

$g_1(\mathbf{x}) \leqq 0$

$g_2(\mathbf{x}) \leqq 0$

・・・・・・

$g_m(\mathbf{x}) \leqq 0$

$f(\mathbf{x})$，$g_i(\mathbf{x})$が線形（一次式）

－＞線形計画問題

$f(\mathbf{x})$または$g_i(\mathbf{x})$が非線形

－＞非線形計画問題

変数　$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots x_n)$

の値が整数値（離散量）

－＞整数計画問題

（離散的最適化問題

組合せ最適化問題）

# 線形計画問題

いくつかの1次不等式や等式で表される制約条件のもとで，１次関数を最大あるいは最小にする問題.

＜標準形＞

目的関数:  $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \longrightarrow$ 最小

制約条件:  $\mathrm{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$

目的関数:　$-2x_1+5x_2 \longrightarrow$ 最大

制約条件:

$$
\begin{aligned}
4x_1 &- 6x_2 = 30 \\
2x_1 &+ 8x_2 \leqq 50 \\
7x_1 &+ 5x_2 \geqq 10
\end{aligned}
$$

$x_1 \geqq 0$,　$x_2$ は符号制約なし

＜標準形との相違点＞

（１）目的関数を最大化

（２）変数$x_2$には符号の制約がない

（３）２番目と3番目の制約条件が不等式

（１）目的関数に－１を掛ける

（２） $x_2 = x'_2 - x''_2$ ，　$x'_2 \geqq 0$，　$x''_2 \geqq 0$

（３）新しい非負変数 $x_4, x_5$ を導入（スラック変数）

目的関数: $2x_1 - 5x_2 + 5x_3 \longrightarrow$ 最小

制約条件:

$$
\begin{aligned}
4x_1 - 6x_2 + 6x_3 \qquad\qquad &= 30 \\
2x_1 + 8x_2 - 8x_3 + x_4 \qquad &= 50 \\
7x_1 + 5x_2 - 5x_3 \qquad - x_5 &= 10
\end{aligned}
$$

$$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0,\ x_4 \geqq 0,\ x_5 \geqq 0$$

# 基底解と最適解

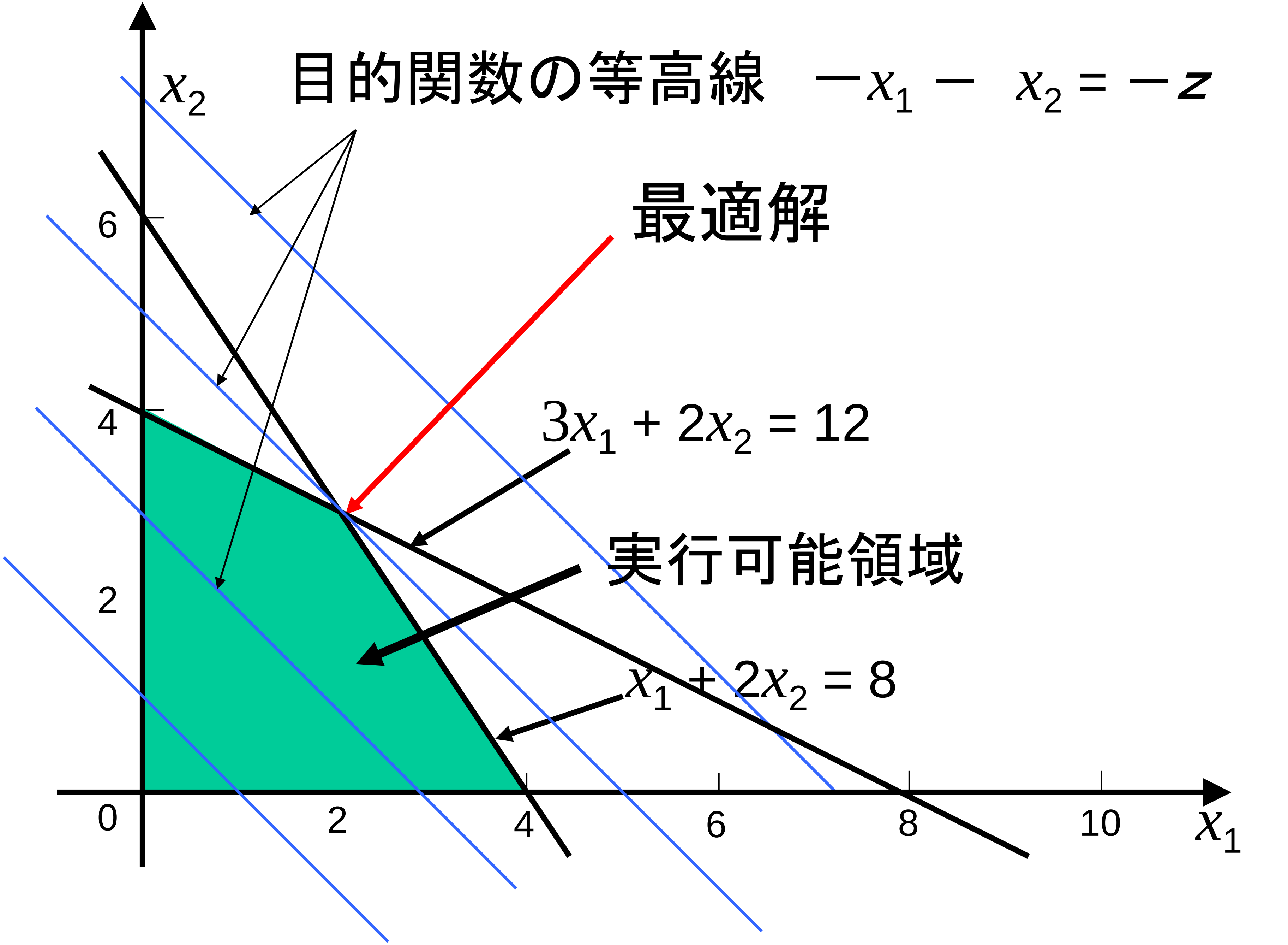
目的関数： $-x_1 - x_2 \longrightarrow$ 最小

制約条件：

$$3x_1 + 2x_2 \leqq 12$$

$$x_1 + 2x_2 \leqq 8$$

$$x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0$$



目的関数の等高線　$-x_1 - x_2 = -z$
最適解
$3x_1 + 2x_2 = 12$
実行可能領域
$x_1 + 2x_2 = 8$
$x_2$
$x_1$
0
2
4
6
8
10

＜２変数の線形計画問題＞

実行可能領域：平面上の凸多角形

目的関数の等高線：平行な直線

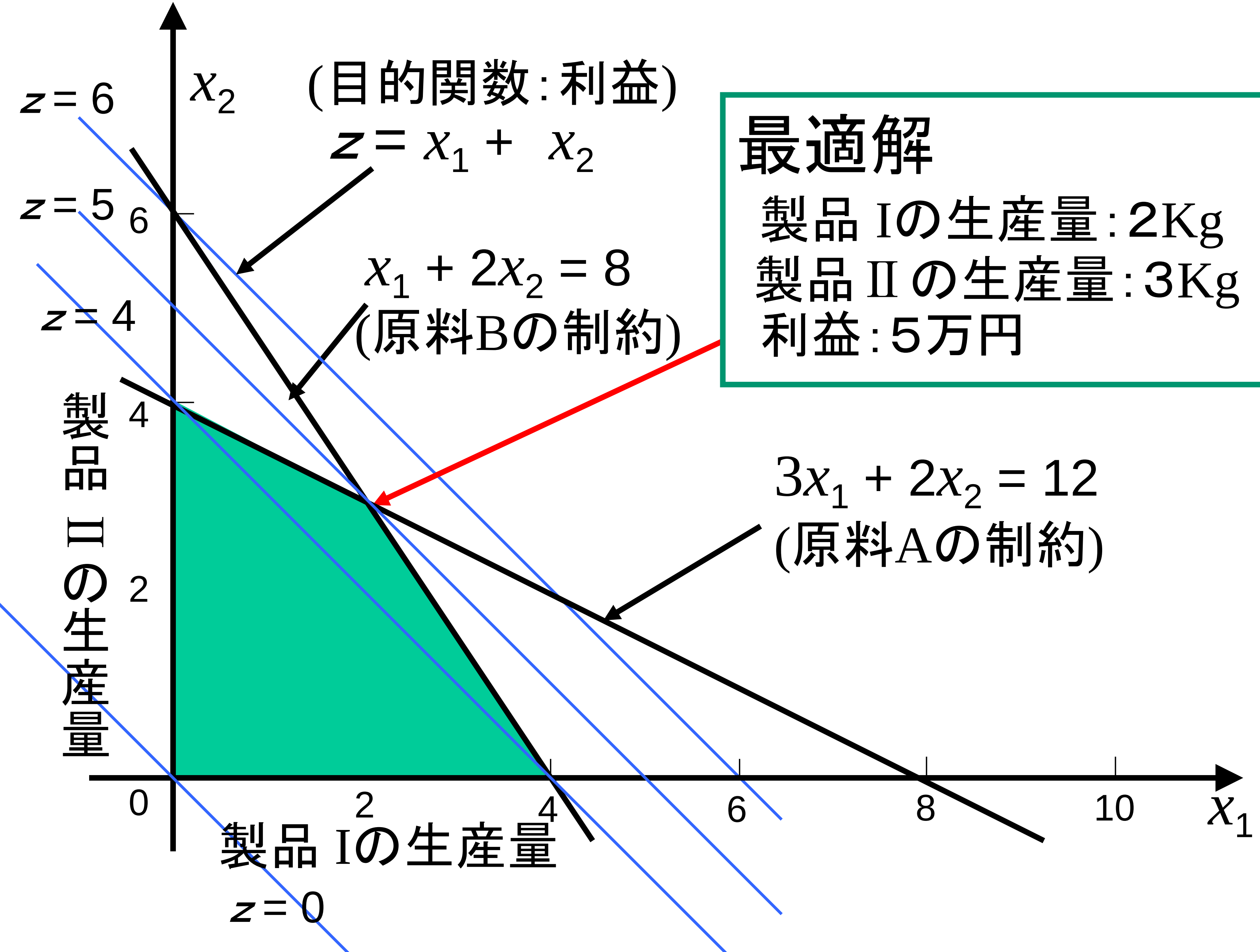
最適解：凸多角形の境界上に存在

＜一般の線形計画問題＞

実行可能領域：空間$R^n$上の凸多面体

最適解：凸多面体の頂点のなかに存在

シンプレックス法（単体法）：G.B.Dantzig (1947)



(目的関数:利益)
z = x1 + x2
最適解
製品 Iの生産量:2Kg
製品 IIの生産量:3Kg
利益:5万円
x1 + 2x2 = 8
(原料Bの制約)
3x1 + 2x2 = 12
(原料Aの制約)
z = 6
z = 5
z = 4
z = 0
x2
x1
製品IIの生産量
製品 Iの生産量
0
2
4
6
8
10

＜標準形＞

目的関数:　$-x_1 - x_2 \longrightarrow$ 最小

制約条件:

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\quad &= 12 \\
x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 &= 8
\end{aligned}
$$

$$x_1 \geqq 0\,,\ x_2 \geqq 0\,,\ x_3 \geqq 0\,, x_4 \geqq 0$$

２つの変数を適当に選んでそれらを0とおけば、残りの２つの変数は一意的に定まる。

$\longrightarrow$ 基底解

基底解のうち $\boldsymbol{x} \geqq 0$ を満たすもの

$\longrightarrow$ 実行可能基底解

基底解を定める際に0 とおいた変数

$\longrightarrow$ 非基底変数 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$

それ以外の変数

$\longrightarrow$ 基底変数 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \quad &= 12 \\ x_1 + 2x_2 \quad + x_4 &= 8 \end{aligned}$$

(f) $x_1 = x_2 = 0$

$$\begin{aligned} x_3 &= 12 \\ x_4 &= 8 \end{aligned} \qquad z = 0$$

$$\boldsymbol{x} = (0,0,12,8)^T : \boldsymbol{x}_B = (x_3,x_4)^T,\ \boldsymbol{x}_N = (x_1,x_2)^T$$

(c) $x_2 = x_3 = 0$

$$\begin{aligned} 3x_1 \quad &= 12 \\ x_1 + x_4 &= 8 \end{aligned} \qquad z = 4$$

$$\boldsymbol{x} = (4,0,0,4)^T : \boldsymbol{x}_B = (x_1,x_4)^T,\ \boldsymbol{x}_N = (x_2,x_3)^T$$

(a) $x_3 = x_4 = 0$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 12 \\ x_1 + 2x_2 &= 8 \end{aligned} \qquad z = 5$$

$$\boldsymbol{x} = (2,3,0,0)^T : \boldsymbol{x}_B = (x_1,x_2)^T,\ \boldsymbol{x}_N = (x_3,x_4)^T$$

(a) $\boldsymbol{x} = (2,3,0,0)^{\mathrm{T}}$ :基底変数 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = (x_1,x_2)^{\mathrm{T}}$,

非基底変数$\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = (x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$

(b) $\boldsymbol{x} = (8,0,-12,0)^{\mathrm{T}}$ : $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = (x_1,x_3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = (x_2,x_4)^{\mathrm{T}}$

(c) $\boldsymbol{x} = (4,0,0,4)^{\mathrm{T}}$ : $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = (x_1,x_4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = (x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$

(d) $\boldsymbol{x} = (0,4,4,0)^{\mathrm{T}}$ : $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = (x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = (x_1,x_4)^{\mathrm{T}}$

(e) $\boldsymbol{x} = (0,6,0,-4)^{\mathrm{T}}$ : $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = (x_2,x_4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = (x_1,x_3)^{\mathrm{T}}$

(f) $\boldsymbol{x} = (0,0,12,8)^{\mathrm{T}}$ : $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = (x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = (x_1,x_2)^{\mathrm{T}}$

$\boxed{x_1 = 0}$ $x_2$ 軸

$\boxed{x_2 = 0}$ $x_1$ 軸

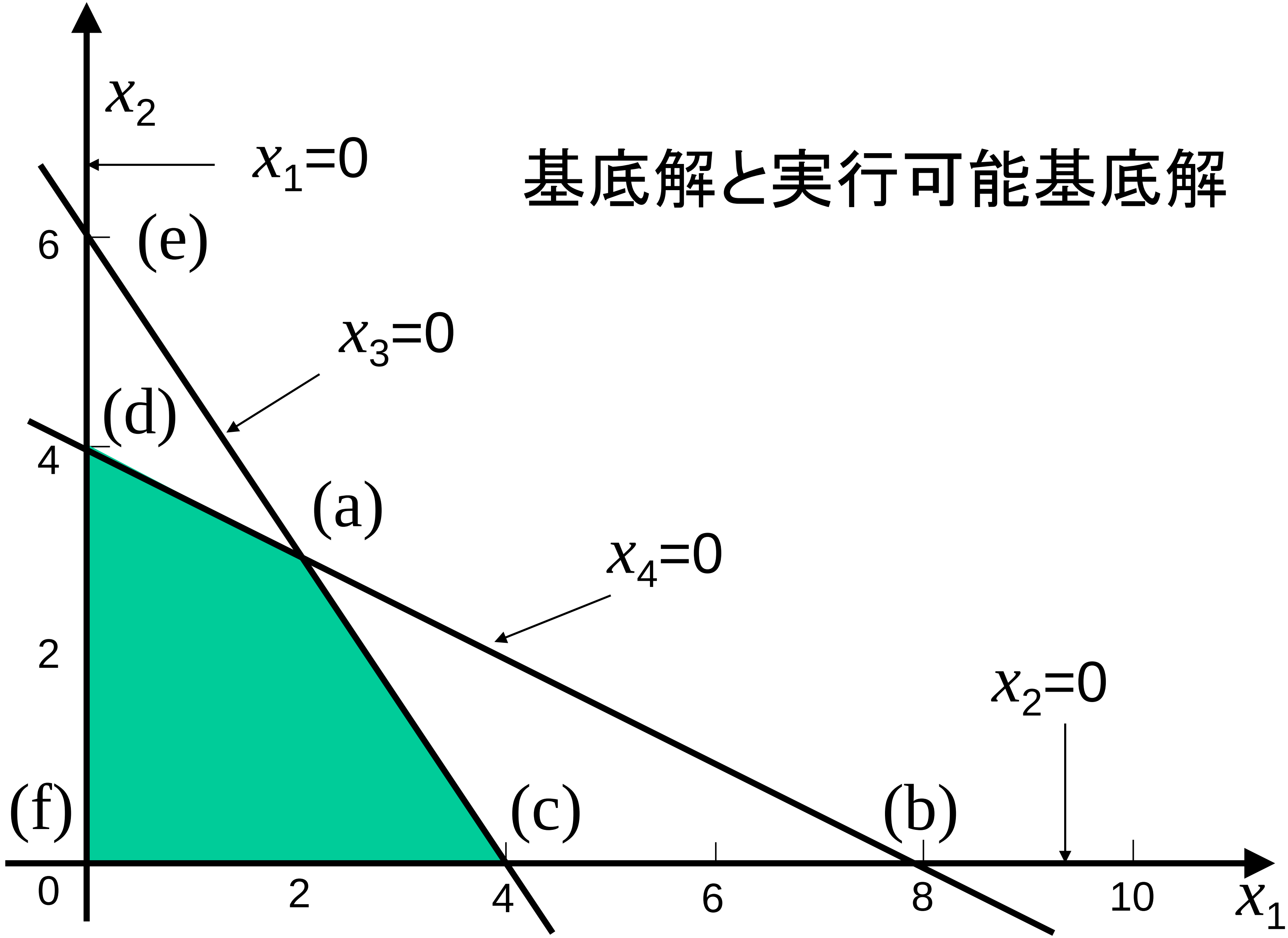
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 12$$

$\boxed{x_3 = 0}$ 直線: $3x_1 + 2x_2 = 12$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 8$$

$\boxed{x_4 = 0}$ 直線: $x_1 + 2x_2 = 8$

# 基底解と実行可能基底解



＜一般の標準形問題の制約条件＞

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$　　　A : $m \times n$行列

$m < n$　かつ　rank A = $m$ とする

変数$n$個，基底変数$m$個，非基底変数$n-m$個

$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}$ : $m$次元基底変数ベクトル

$\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$ : $(n-m)$次元非基底変数ベクトル

行列Aの$n$本の列を，基底変数に対応する$m$本の列と非基底変数に対応する$n-m$本の列に分割する.

基底変数に対応する$m \times n$行列 B:

⟶ 基底行列

非基底変数に対応する$m \times (n-m)$行列 N :

⟶ 非基底行列

$$A = (B, N)$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 12$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 8$$

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}$$

$$\mathrm{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

(a) $\boldsymbol{x} = (2,3,0,0)^{\mathrm{T}}$ : 基底変数 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = (x_1,x_2)^{\mathrm{T}}$,

非基底変数$\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = (x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$

$$\mathrm{A} = (\mathrm{B}, \mathrm{N}) \qquad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A = (B, N)$　とする。

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$B\boldsymbol{x}_B + N\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{b}$$

Bが正則ならば，非基底変数の値を0とおくことにより，基底解が得られる.

$$\boldsymbol{x}_B = B^{-1}\boldsymbol{b} \quad , \quad \boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{0}$$

$B^{-1}\boldsymbol{b} \geqq \boldsymbol{0}$ のとき，実行可能基底解

実行可能
基底解

対応

実行可能領域
（凸多面体）の頂点

1組の基底変数と非基底変数の入れ替え

1つの頂点から隣り合う別の頂点に移動

ピボット操作

＜最適性の判定＞

$$A = (B, N)$$

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$B\boldsymbol{x}_B + N\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{b}$$

$$B\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{b} - N\boldsymbol{x}_N$$

$$B^{-1}B\boldsymbol{x}_B = B^{-1}(\boldsymbol{b} - N\boldsymbol{x}_N)$$

$$\boldsymbol{x}_B = B^{-1}\boldsymbol{b} - B^{-1}N\boldsymbol{x}_N$$

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \mathrm{B}^{-1}\mathrm{N}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$$

目的関数に代入

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}{}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}{}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \\ &= \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}{}_{\mathrm{B}}(\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \mathrm{B}^{-1}\mathrm{N}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}) + \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}{}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \\ &= \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}{}_{\mathrm{B}}\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}{}_{\mathrm{N}} - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}{}_{\mathrm{B}}\mathrm{B}^{-1}\mathrm{N})\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}\end{aligned}$$

$\pi = (\mathrm{B}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}$ とする（$\pi$：シンプレックス乗数）

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}{}_{\mathrm{N}} - \pi^{\mathrm{T}}\mathrm{N} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}{}_{\mathrm{N}} - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}{}_{\mathrm{B}}\mathrm{B}^{-1}\mathrm{N} \geqq \boldsymbol{0}$$

が成り立つならば最適解

すべての実行可能解 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \geqq \mathbf{0}$ の中で目的関数は$\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \mathbf{0}$ のとき最小値をとる.

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}{}_{\mathrm{B}} \mathrm{B}^{-1} \boldsymbol{b} \,(= \pi^{\mathrm{T}} \boldsymbol{b})$$

実行可能解 $(\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}, \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}) = (\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b}, \mathbf{0})$ は最適解

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}{}_{\mathrm{N}} - \pi^{\mathrm{T}} \mathrm{N} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}{}_{\mathrm{N}} - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}{}_{\mathrm{B}} \mathrm{B}^{-1} \mathrm{N} \geqq \mathbf{0}$$

$\longrightarrow$ 最適性の判定条件

$\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}} - \mathrm{N}^{\mathrm{T}}\pi$の各要素: $\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$の相対コスト係数

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}{}_{\mathrm{B}}\,\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}{}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$$
$$= \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}{}_{\mathrm{B}}\,\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}{}_{\mathrm{N}} - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}{}_{\mathrm{B}}\mathrm{B}^{-1}\mathrm{N})\,\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$$

目的関数: $10 + x_1 - x_2 \longrightarrow$ 最小

制約条件: $x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0$

$x_1 = x_2 = 0$ は最適解か？

目的関数: $10 + x_1 + x_2 \longrightarrow$ 最小

制約条件: $x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0$

$x_1 = x_2 = 0$ は最適解か？

目的関数:　$-x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4$

制約条件:　$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 12$

$x_1 + 2x_2 + x_4 = 8$

(f) $\boldsymbol{x} = (0,0,12,8)^{\mathrm{T}}$ : $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = (x_3, x_4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}{}_{\mathrm{N}} - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}{}_{\mathrm{B}}\mathrm{B}^{-1}\mathrm{N} = (-1,-1) - (0,0)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

最適ではない　$=(-1,-1)$

(c) $\boldsymbol{x} = (4,0,0,4)^{\mathrm{T}}$ : $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = (x_1, x_4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = (x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}{}_{\mathrm{N}} - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}{}_{\mathrm{B}}\mathrm{B}^{-1}\mathrm{N} = (-1,0) - (-1,0)\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

最適ではない　$=(-1/3,1/3)$

目的関数: $-x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4$

制約条件: $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 12$

$x_1 + 2x_2 + x_4 = 8$

(a) $\boldsymbol{x} = (2,3,0,0)^T$ : $\boldsymbol{x}_B = (x_1,x_2)^T$, $\boldsymbol{x}_N = (x_3,x_4)^T$

$$\boldsymbol{c}^T{}_N - \boldsymbol{c}^T{}_B B^{-1} N = (0,0) - (-1,-1)\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (0,0) - (-1,-1)\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/4 & 3/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{最適解}}$

$$=(1/4,1/4)$$

## 補足:実際の解き方

すべてを1度に求める。

目的関数: $-x_1 - x_2$

制約条件: $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 12$

$x_1 + 2x_2 + x_4 = 8$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| -1 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 2 | 1 | 0 | 12 |
| 1 | 2 | 0 | 1 | 8 |

## 基底解 (a) $\boldsymbol{x}_\mathrm{B} = (x_1,x_2)^\mathrm{T}$, $\boldsymbol{x}_\mathrm{N} = (x_3,x_4)^\mathrm{T}$

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | |
|---|---|---|---|---|
| -1 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 2 | 1 | 0 | 12 |
| 1 | 2 | 0 | 1 | 8 |

↓ 行列の基本変形

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1/4 | 1/4 | 5 |
| 1 | 0 | 1/2 | -1/2 | 2 |
| 0 | 1 | -1/4 | 3/4 | 3 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| -1 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 2/3 | 1/3 | 0 | 4 |
| 1 | 2 | 0 | 1 | 8 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | -1/3 | 1/3 | 0 | 4 |
| 1 | 2/3 | 1/3 | 0 | 4 |
| 0 | 4/3 | -1/3 | 1 | 4 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | -1/3 | 1/3 | 0 | 4 |
| 1 | 2/3 | 1/3 | 0 | 4 |
| 0 | 1 | -1/4 | 3/4 | 3 |

$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = (x_3, x_4)^{\mathrm{T}}$

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}$, $\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}$ | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| | 3 | 2 | 1 | 0 | 12 |
| | 1 | 2 | 0 | 1 | 8 |
| | B | | N | | $\boldsymbol{b}$ |

$\times \mathrm{B}^{-1}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| -1 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1/2 | -1/2 | 2 |
| 0 | 1 | -1/4 | 3/4 | 3 |
| | | $\mathrm{B}^{-1}\mathrm{N}$ | | $\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ |

$\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}\mathrm{B}^{-1}\mathrm{N}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1/4 | 1/4 | 5 |
| 1 | 0 | 1/2 | -1/2 | 2 |
| 0 | 1 | -1/4 | 3/4 | 3 |
| | | $\mathrm{B}^{-1}\mathrm{N}$ | | $\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ |

$-\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}(\mathrm{B}^{-1}\mathrm{B})$

$\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}\mathrm{B}^{-1}\mathrm{N}$

$0 - \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b}$

| $\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}$ | | $\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}$ | | |
|---|---|---|---|---|
| -1 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 2 | 1 | 0 | 12 |
| 1 | 2 | 0 | 1 | 8 |
| B | | N | | $\boldsymbol{b}$ |

↓

$\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}\mathrm{B}^{-1}\mathrm{N}$ 相対コスト係数

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1/4 | 1/4 | 5 |
| 1 | 0 | 1/2 | -1/2 | 2 |
| 0 | 1 | -1/4 | 3/4 | 3 |
| | | $\mathrm{B}^{-1}\mathrm{N}$ | | $\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}$ |

$-\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b}$

$= -\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}$

$=$ −目的関数の値

$\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}$ 基底解($\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = 0$)

## 基底解 (c) $\boldsymbol{x}_B = (x_1, x_4)^T, \quad \boldsymbol{x}_N = (x_2, x_3)^T$

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | |
|---|---|---|---|---|
| -1 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 2 | 1 | 0 | 12 |
| 1 | 2 | 0 | 1 | 8 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| -1 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 2/3 | 1/3 | 0 | 4 |
| 1 | 2 | 0 | 1 | 8 |

$\Downarrow$ 行列の基本変形

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | -1/3 | 1/3 | 0 | 4 |
| 1 | 2/3 | 1/3 | 0 | 4 |
| 0 | 4/3 | -1/3 | 1 | 4 |

基底解 (f) $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = (x_3, x_4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | |
|---|---|---|---|---|
| -1 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 2 | 1 | 0 | 12 |
| 1 | 2 | 0 | 1 | 8 |

# シンプレックス法

最適性の条件

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}{}_{\mathrm{N}} - \pi^{\mathrm{T}}\mathrm{N} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}{}_{\mathrm{N}} - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}{}_{\mathrm{B}}\mathrm{B}^{-1}\mathrm{N} \geqq \mathbf{0}$$

が成立していない場合、負の要素が少なくとも一つ存在する。 $\longrightarrow$ $x_{\mathrm{k}}$

$x_{\mathrm{k}}$を増加させれば目的関数の値を減少できる

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \mathrm{B}^{-1}\mathrm{N}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$$

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \mathrm{B}^{-1}a_{\mathrm{k}}x_{\mathrm{k}}$$

$$\overline{\boldsymbol{b}} = \mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{y} = \mathrm{B}^{-1} a_k$$

$$\Delta = \min \{ \overline{b_i} / y_i \mid y_i > 0 \ (i=1,\ldots,m) \}$$

非基底変数 $x_k$を最大Δまで増大させても非負条件$\boldsymbol{x} \geqq \mathbf{0}$は満たされる。

$x_k$の値をΔまで増やしたときΔ＝ $b_i / y_i$を満たす$i$に対応する基底変数の値は0

＜シンプレックス法＞

(0) 初期実行可能基底解$(\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}, \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}) = (\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{0})$
を選ぶ。$\overline{\boldsymbol{b}} = \mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ とおく。

(1) シンプレックス乗数$\pi = (\mathrm{B}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}$を計算

(2)非基底変数の相対コスト係数 $c_j - \pi^{\mathrm{T}} a_j$
がすべて0以上なら、最適基底解。計算終了。

そうでなければ、$c_k - \pi^{\mathrm{T}} a_k < 0$ である非基底
変数$x_{\mathrm{k}}$を1つ選ぶ。

(3) ベクトル$\boldsymbol{y} = \mathrm{B}^{-1} a_k$を計算

(4)ベクトル$\boldsymbol{y}$に正の要素がなければ、問題は有界でない。計算終了。そうでなければ、

$$\Delta = \min \{ b_i / y_i \mid y_i > 0 \ (i = 1, \ldots, m) \}$$

(5) 非基底変数の値を$\Delta$、それ以外の非基底変数の値を0とおく。$\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{b} - \Delta \boldsymbol{y}$

非基底変数$x_k$を基底変数とし、ステップ(4) で求めた$i$に対応する基底変数を非基底変数とする。ステップ(1) に戻る。

# シンプレックス・タブロー

相対コスト係数 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}{}_{\mathrm{N}} - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}{}_{\mathrm{B}}\mathrm{B}^{-1}\mathrm{N}$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| $x_3$ | 3 | 2 | 1 | 0 | 12 |
| $x_4$ | 1 | 2 | 0 | 1 | 8 |

−(目的関数値) $= -\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}{}_{\mathrm{B}}\,\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b}$

$\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b}$

$\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}$

$\boldsymbol{x} = (0,0,12,8)^{\mathrm{T}}$ : 基底解

基底変数 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = (x_3, x_4)^{\mathrm{T}}$

非基底変数 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| $x_3$ | 3 | 2 | 1 | 0 | 12 |
| $x_4$ | 1 | 2 | 0 | 1 | 8 |

基底解

$\boldsymbol{x} = (0,0,12,8)^T$

非基底変数 $\boldsymbol{x}_N = (x_1, x_2)^T$ の中で基底に入る（値が0より大きくなる）変数

$\longrightarrow$ 相対コスト係数が最小の変数： $x_1$

$3x_1 + 2x_2 + x_3 \quad = \quad 12$ $\quad \boxed{x_2 = x_3 = 0} \rightarrow 3x_1 = 12 \quad \boxed{x_1 = 4}$

$x_1 + 2x_2 \quad\quad + x_4 = 8$ $\quad \boxed{x_2 = x_4 = 0} \rightarrow \boxed{x_1 = 8}$

$x_1$の最大値4 $\quad$ $\boxed{x_3 = 0 \text{となる}}$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| $x_3$ | 3 | 2 | 1 | 0 | 12 |
| $x_4$ | 1 | 2 | 0 | 1 | 8 |

基底解

$$\boldsymbol{x} = (0,0,12,8)^{\mathrm{T}}$$

基底変数 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = (x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$

非基底変数$\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}= (x_1,x_2)^{\mathrm{T}}$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | -1/3 | 1/3 | 0 | 4 |
| $x_1$ | 1 | 2/3 | 1/3 | 0 | 4 |
| $x_4$ | 0 | 4/3 | -1/3 | 1 | 4 |

基底解

$$\boldsymbol{x} = (4,0,0,4)^{\mathrm{T}}$$

基底変数 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = (x_1,x_4)^{\mathrm{T}}$

非基底変数$\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}=(x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | -1/3 | 1/3 | 0 | 4 |
| $x_1$ | 1 | 2/3 | 1/3 | 0 | 4 |
| $x_4$ | 0 | 4/3 | -1/3 | 1 | 4 |

基底解

$\boldsymbol{x} = (4,0,0,4)^T$

基底変数 $\boldsymbol{x}_B = (x_1,x_4)^T$

非基底変数$\boldsymbol{x}_N=(x_2,x_3)^T$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0 | 1/4 | 1/4 | 5 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 1/2 | -1/2 | 2 |
| $x_2$ | 0 | 1 | -1/4 | 3/4 | 3 |

基底解

$\boldsymbol{x} = (2,3,0,0)^T$

基底変数 $\boldsymbol{x}_B = (x_1,x_2)^T$

非基底変数$\boldsymbol{x}_N=(x_3,x_4)^T$

最適解

# 双対性

## ＜主問題＞

目的関数:　$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \longrightarrow$ 最小

制約条件:　$\mathrm{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \ \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$

## ＜双対問題＞

目的関数:　$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w} \longrightarrow$ 最大

制約条件:　$\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w} \leqq \boldsymbol{c}$

＜主問題＞

目的関数: $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \longrightarrow$ 最小

制約条件: $\mathrm{A}\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{b},\ \ \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$

＜双対問題＞

目的関数: $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w} \longrightarrow$ 最大

制約条件: $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w} \leqq \boldsymbol{c},\ \ \boldsymbol{w} \geqq \boldsymbol{0}$

主問題(primal problem) : (P)
双対問題(dual problem) : (D)

＜弱双対定理＞

(P)と(D)それぞれの任意の実行可能解 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}$ に対して，常に不等式 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}$ が成り立つ.

[証明]

$\mathrm{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \ \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$ および $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w} \leqq \boldsymbol{c}$ より

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geqq (\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$$

$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geqq$ (D)の最大値 ($\boldsymbol{x}$: (P)の実行可能解)

$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w} \leqq$ (P)の最小値 ($\boldsymbol{x}$: (D)の実行可能解)

$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}$ ならば $\boldsymbol{x}$ , $\boldsymbol{w}$ は最適解

＜双対定理＞

(P)または(D)の一方が最適解をもてば他方も最適解をもち, (P)の最小値と(D)の最大値は等しい.

| 材料 | ビタミンC | ビタミンD | 値段 |
|---|---|---|---|
| $R_1$ | $a_{11}$mg／g | $a_{21}$mg／g | $c_1$円／g |
| $R_2$ | $a_{12}$mg／g | $a_{22}$mg／g | $c_2$円／g |
| $R_3$ | $a_{13}$mg／g | $a_{23}$mg／g | $c_3$円／g |

ビタミンC，Dを$b_1$mg，$b_2$mg以上含む料理

$x_j$ : 材料 $R_j$ の量

目的関数: $c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \longrightarrow$ 最小

制約条件: $a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \geqq b_1$

$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \geqq b_2$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0$

ビタミンC, Dの1mgあたりの価格：$w_1$円, $w_2$円

目的関数： $b_1 w_1 + b_2 w_2 \longrightarrow$ 最大

制約条件： $a_{11} w_1 + a_{21} w_2 \leqq c_1$

$$a_{12} w_1 + a_{22} w_2 \leqq c_2$$

$$a_{13} w_1 + a_{23} w_2 \leqq c_3$$

$$w_1 \geqq 0,\ w_2 \geqq 0$$

双対問題の最適解$\boldsymbol{w}^*$：主問題の潜在価格

（シャドウ・プライス）

# 多項式時間アルゴリズム

シンプレックス法の反復回数:

制約条件の数の1.5倍から3倍程度

多項式時間アルゴリズムではない

＜内点法＞

多項式時間アルゴリズム

大規模な問題ではシンプレックス法より効率的