情報技術の社会への適用

計算機を何に使うか

何らかの役に立つこと ⟶ 目的

計算機をどのように使うか

目的を達成できるように

目的の状態を実現できるように

衣食住⟶より快適に、より便利に、

より豊かに、より安全に・・・

需要 ⟷ 供給

＜計画数学＞

目的を達成するための最適な計画を作成するための方法

＜最適化の概念＞

最適化すべき問題

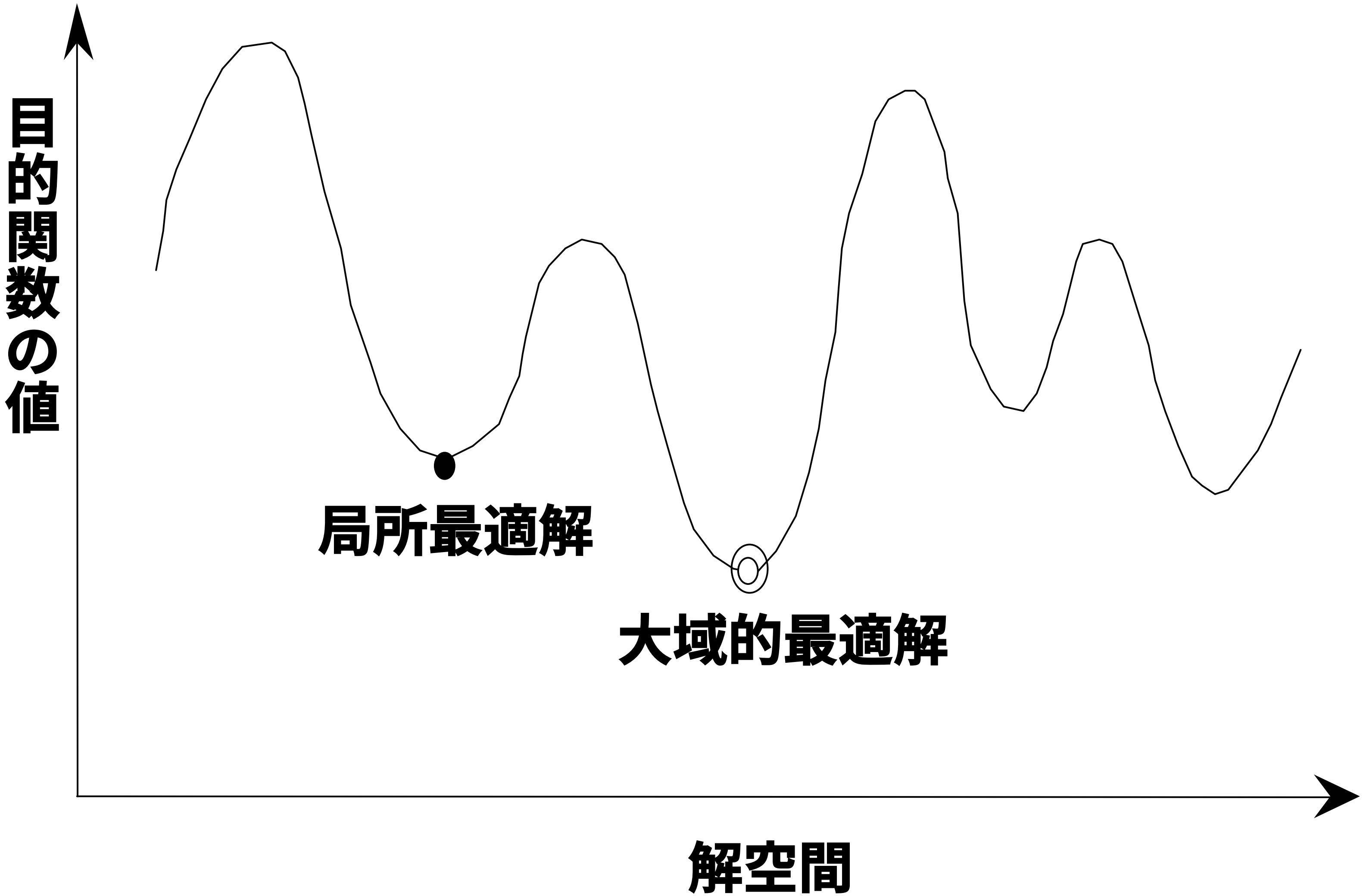
↓

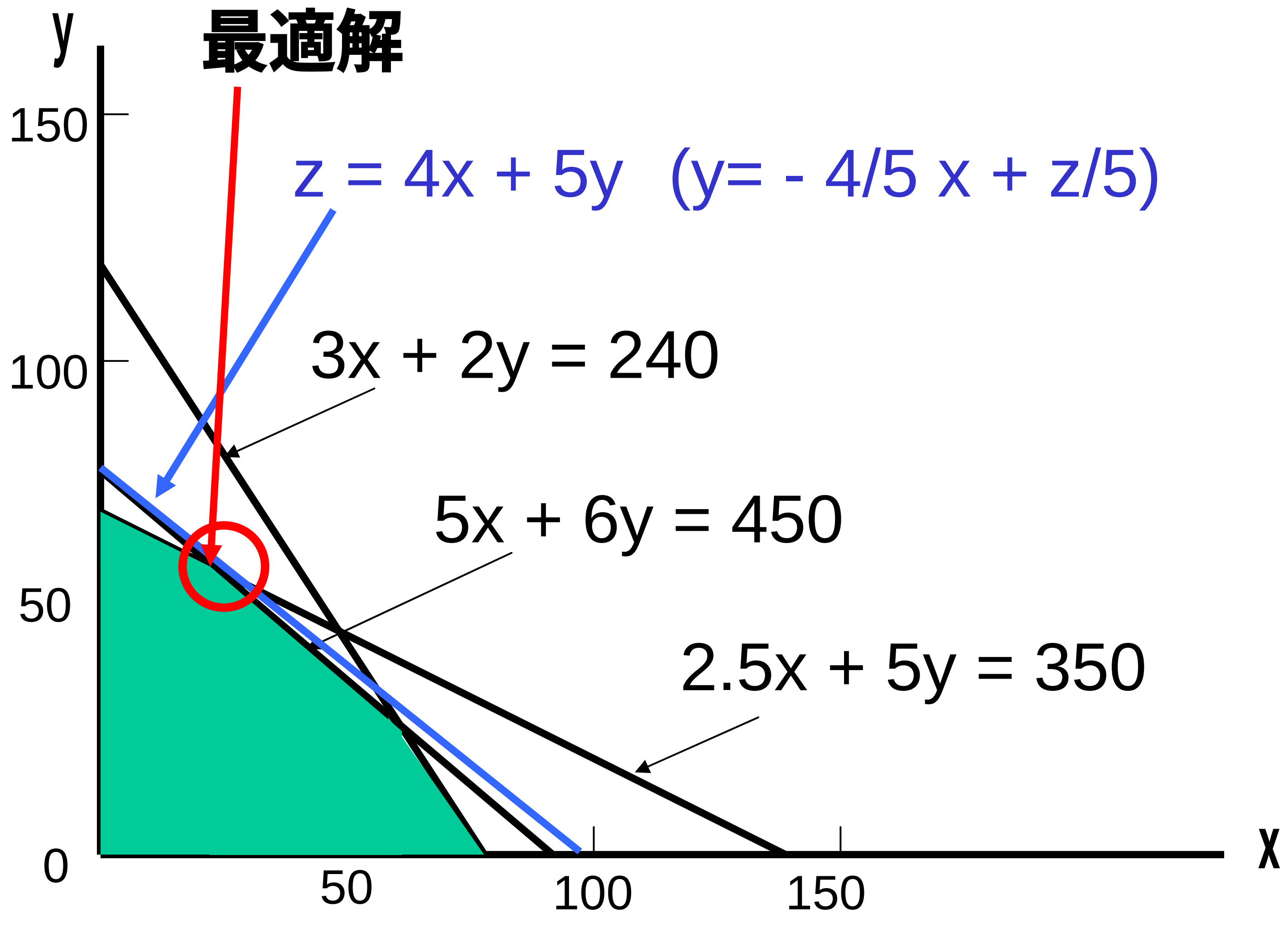
数学モデル ← 数理計画法

変数，数式

定められた計算手順を用いて解くための方法論

＜最適化の概念＞




最適解
y
150
100
50
0
z = 4x + 5y (y= - 4/5 x + z/5)
3x + 2y = 240
5x + 6y = 450
2.5x + 5y = 350
50
100
150
x

＜数理計画＞

対象とする数理モデルが現実のどのような問題を定式化したものであるかにかかわらず、数学的構造がおなじであれば共通の方法が適用できる。

数理計画法

目的関数：

$f(x) = f(x_1, x_2 \cdots x_n)$

－＞最小化

制約条件：

$g_1(x) \leqq 0$

$g_2(x) \leqq 0$

$\cdots\cdots$

$g_m(x) \leqq 0$

$f(x)$, $g_i(x)$ が線形（一次式）

－＞線形計画問題

$f(x)$ または $g_i(x)$ が非線形

－＞非線形計画問題

変数　$x = (x_1, x_2, \cdots x_n)$

の値が整数値（離散量）

－＞整数計画問題

（離散的最適化問題

組合せ最適化問題）

＜数理計画モデル＞

- 線形計画問題
- ネットワーク計画問題
- 非線形計画問題
- 組合せ計画問題

線形計画モデル

<生産計画問題＞

４種類の原料Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄを用いて、３種類の製品 I,II,III を生産している工場が、最大の利益をあげるにはどのような生産計画をたてればよいか。

変数：各製品 I,II,III の生産量

x_1，x_2，x_3

製品を１単位生産するごとに得られる利益

製品 I,II,III ：70万円、120万円、30万円

各製品をx_1, x_2, x_3単位づつ生産したときの総利益

$$70x_1 + 120x_2 + 30x_3$$ （万円）

⟶ 最大化

目的関数

生産計画問題のデータ

	I	II	III
A	5	0	6
B	0	2	8
C	7	0	15
D	3	11	0

原料の利用可能量

A：80単位
B：50単位
C：100単位
D：70単位

$$
\left.
\begin{array}{rcrcrcr}
5x_1 & & & + & 6x_3 & \leqq & 80 \\
 & & 2x_2 & + & 8x_3 & \leqq & 50 \\
7x_1 & & & + & 15x_3 & \leqq & 100 \\
3x_1 & + & 11x_2 & & & \leqq & 70 \\
\\
\multicolumn{7}{c}{x_1 \geqq 0,\quad x_2 \geqq 0,\quad x_3 \geqq 0}
\end{array}
\right]
$$

制約条件

<線形計画問題＞

目的関数：$70x_1 + 120x_2 + 30x_3 \longrightarrow$ **最大**

制約条件：

$$
\begin{aligned}
5x_1 \qquad\qquad\qquad &+ 6x_3 \leqq 80 \\
2x_2 \quad &+ 8x_3 \leqq 50 \\
7x_1 \qquad\qquad\qquad &+ 15x_3 \leqq 100 \\
3x_1 + 11x_2 \qquad\quad & \qquad\ \ \leqq 70
\end{aligned}
$$

$$x_1 \geqq 0,\quad x_2 \geqq 0,\quad x_3 \geqq 0$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 8 \\ 7 & 0 & 15 \\ 3 & 11 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 80 \\ 50 \\ 100 \\ 70 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 70 \\ 120 \\ 30 \end{bmatrix}$$

目的関数：$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} \longrightarrow$ **最大**

制約条件：$A\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \geqq 0$

＜輸送問題＞

A社は２つの工場A_1,A_2で製品を生産し、３つの取引先B_1,B_2,B_3に納入している。

注文量

B_1	70
B_2	40
B_3	60

生産量

A_1	90
A_2	80

輸送コスト

	B_1	B_2	B_3
A_1	4	7	12
A_2	11	6	3

＜変数＞

x_{ij}：工場A_iから取引先B_jへの輸送量

(i= 1,2 ; j= 1,2,3)

＜制約条件＞

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 90$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 80$$

工場A_1,A_2での生産量

$$x_{11} + x_{21} = 70$$
$$x_{12} + x_{22} = 40$$
$$x_{13} + x_{23} = 60$$

取引先B_1,B_2,B_3の注文量

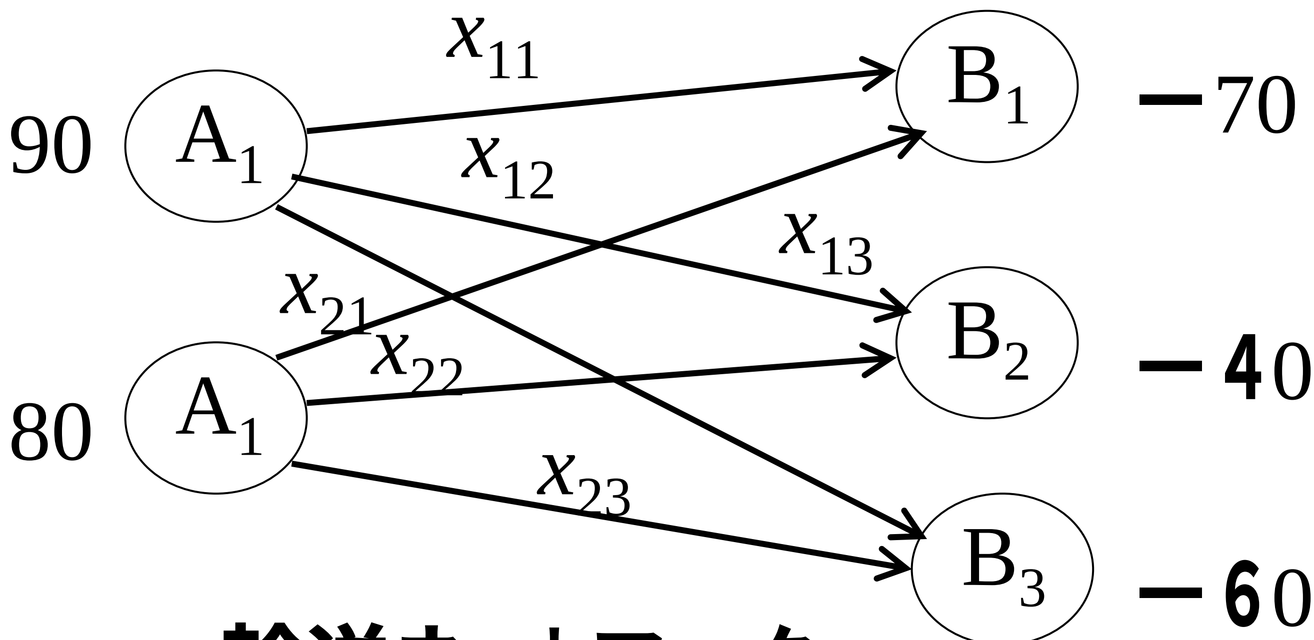
$$x_{ij} \geqq 0 \quad (i= 1,2 ;\ j= 1,2,3)$$

輸送量の非負条件

＜目的関数＞

$$4x_{11} + 7\,x_{12} + 12\,x_{13} + 11x_{21} + 6x_{22} + 3x_{23}$$

輸送コストの総和が最小となるようにする



輸送ネットワーク

ネットワークモデル

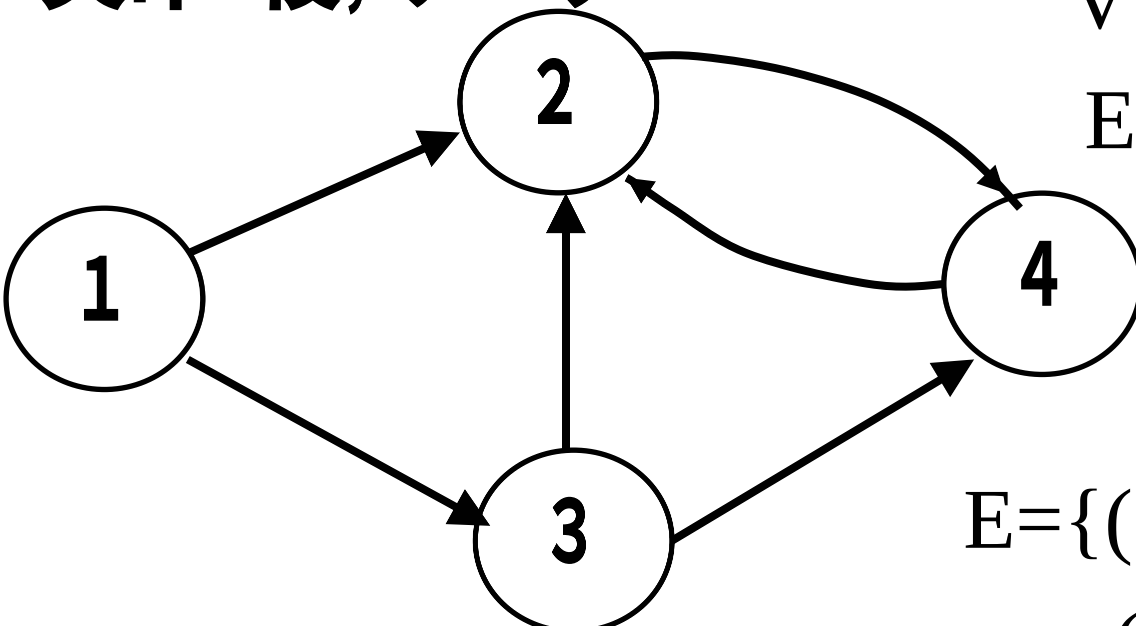
<グラフとネットワーク＞

点：節点，ノード　　枝(i,j):節点iから節点jへの枝

矢印：枝，アーク

V：節点全体の集合

E：枝全体の集合

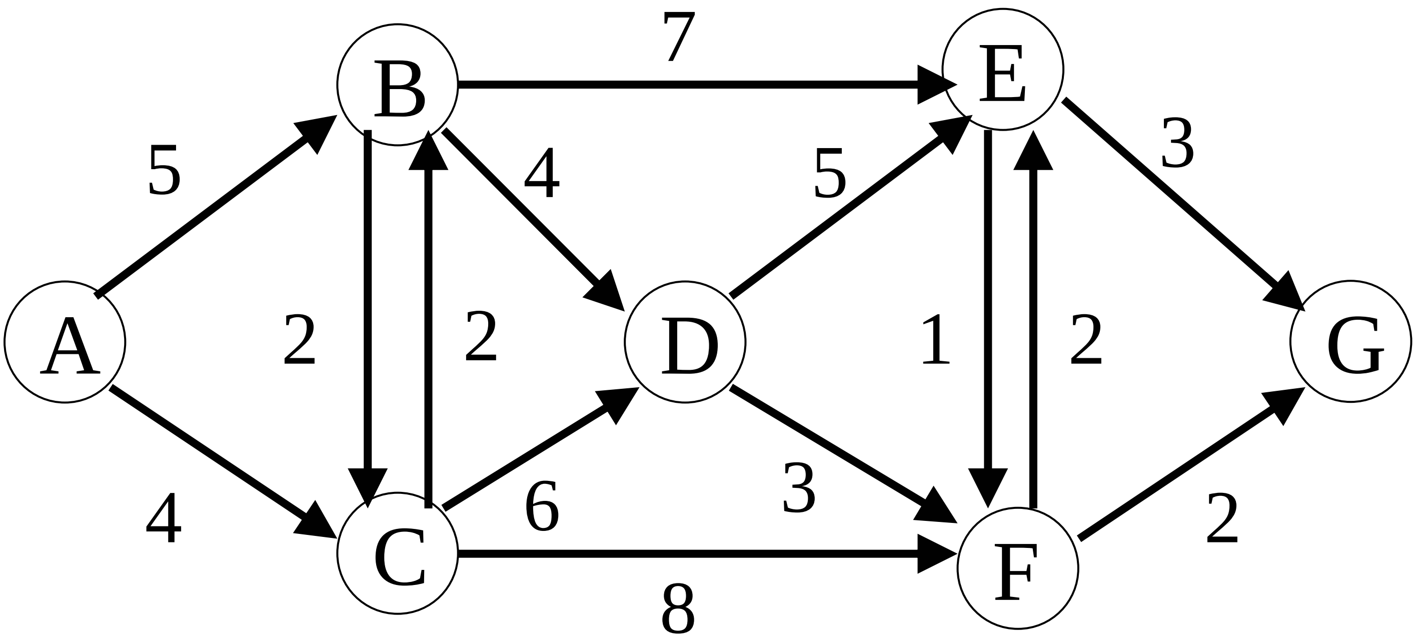


有向グラフ

V={1,2,3,4}

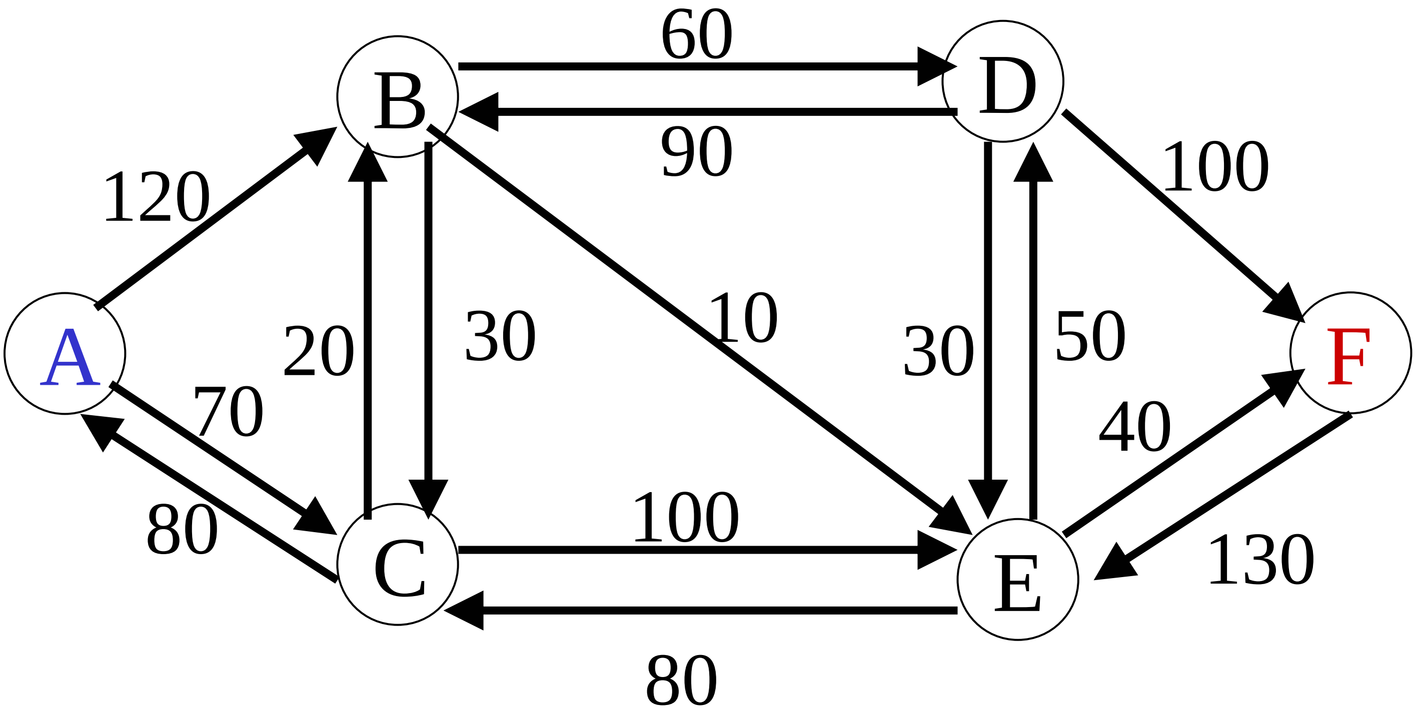
E={(1,2), (1,3), (2,4), (3,2),(3,4),(4,2)}

＜最短路問題＞



路の例：A→C→D→E→F→G

＜最大流問題と最小費用流問題＞



A：ソース（フローを送り出す節点）
F：シンク（フローが流入する節点）

非線形計画モデル

＜ポートフォリオ選択問題＞

資産w円を３種類の株式$\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\mathrm{A}_3$に分散して投資する。

株式の現在価格：p_1, p_2, p_3円

1カ月後の株式の価格：$\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3$円

$\longrightarrow$ 確率変数

各株式に対する投資額：x_1, x_2, x_3円

$$x_1 + x_2 + x_3 = w, \quad x_1, x_2, x_3 \geqq 0$$

1カ月後の資産の総額

$$\mathrm{W} = \frac{\mathrm{P}_1 x_1}{p_1} + \frac{\mathrm{P}_2 x_2}{p_2} + \frac{\mathrm{P}_3 x_3}{p_3}$$

得られる利益：Z

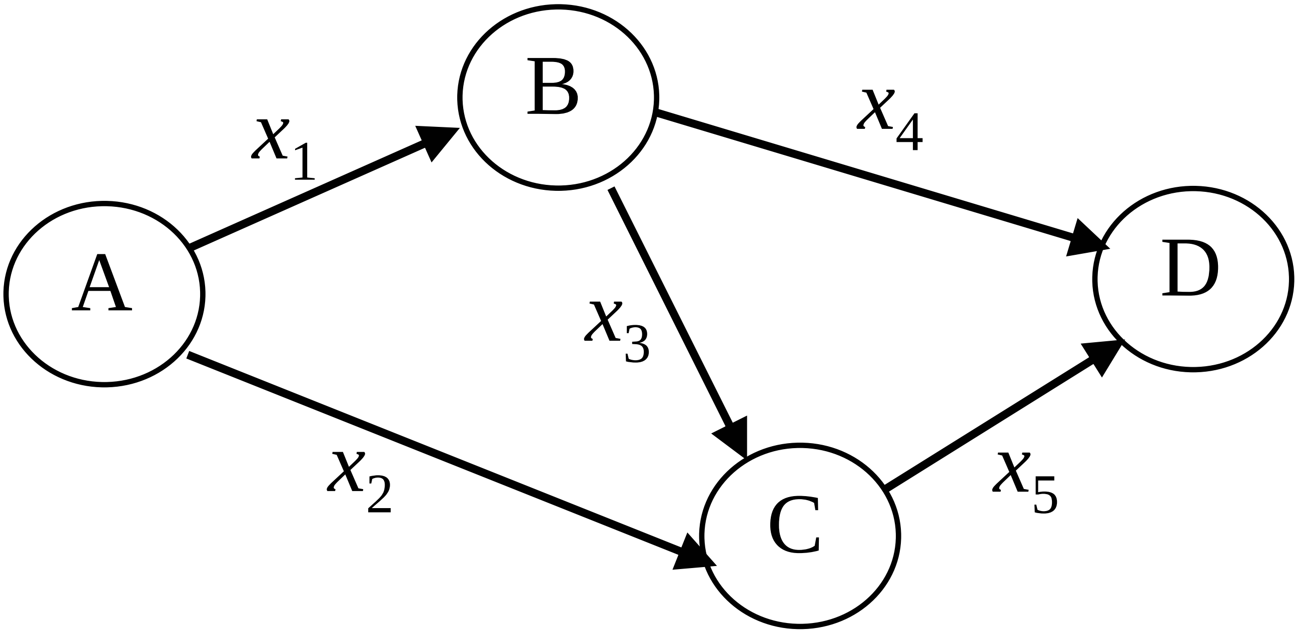
$$\mathrm{Z} = \mathrm{W} - w = \mathrm{R}_1 x_1 + \mathrm{R}_2 x_2 + \mathrm{R}_3 x_3$$

$$\mathrm{R}_\mathrm{i} = \frac{\mathrm{P}_\mathrm{i} - p_\mathrm{i}}{p_\mathrm{i}} \qquad (\mathrm{i}=1, 2, 3)$$ 収益率

＜交通流割当問題＞

W台の車がAからDへ向かう

各道路を通る車の台数：x_1, x_2, x_3, x_4, x_5



組合せ計画モデル

<生産計画問題>

目的関数：　$c^{\mathrm{T}} x \longrightarrow$ 最大

制約条件：　$\mathrm{A}x \leqq b,\quad x \geqq 0$

x の各要素は整数

整数計画問題

＜固定費つき輸送問題＞

2つの倉庫A_1,A_2から取引先B_1,B_2,B_3の注文を満たすように品物を送る。

注文量

B_1	20
B_2	30
B_3	15

輸送コスト

	B_1	B_2	B_3
A_1	5	3	2
A_2	2	7	4

固定費

A_1	300
A_2	200

z_i：輸送費と固定費をあわせた各倉庫A_iの費用

$$z_1 = \begin{cases} 300 + 5x_{11} + 3x_{12} + 2x_{13} & \text{倉庫}A_1\text{を使用するとき} \\ 0 & \text{倉庫}A_1\text{を使用しないとき} \end{cases}$$

$$z_2 = \begin{cases} 200 + 2x_{21} + 7x_{22} + 4x_{23} & \text{倉庫}A_2\text{を使用するとき} \\ 0 & \text{倉庫}A_2\text{を使用しないとき} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{倉庫}A_i\text{を使用するとき} \\ 0 & \text{倉庫}A_i\text{を使用しないとき} \end{cases}$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = \leqq 65\, y_1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = \leqq 65\, y_2$$

$$z_1 = 300\, y_1 + 5x_{11} + 3\, x_{12} + 2\, x_{13}$$

$$z_2 = 200\, y_2 + 2x_{21} + 7\, x_{22} + 4\, x_{23}$$

$$x_{11} + x_{21} = 20$$

$$x_{12} + x_{22} = 30$$

$$x_{13} + x_{23} = 15$$

$z_1 + z_2$ **の最小化**

0-1 **計画問題**

数理計画問題

目的関数：$f(x) \longrightarrow$ 最小（あるいは最大）

制約条件：$x \in S$

変数 x：n次元実ベクトル

目的関数 f：n次元実ベクトル空間 R^n 上で定義された実数値関数

制約条件を満たすx： 実行可能解

実行可能解の集合$S \subseteq R^n$：実行可能領域

実行可能解のなかで目的関数が最小

（あるいは最大）となるもの：最適解